

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Trabajo de fin de grado presentado por

Diego Acedo Moscoso

Tutor: Dr. Enrique Pardo Espino

Firma del alumno

Firma del tutor

Puerto Real, Cádiz, Julio de 2.018

Abstract

The following Bachelor Thesis analyses a surprising result from S. Banach and A. Tarski, which claims that a ball can be decomposed into a finite number of pieces and, by rearranging the pieces, it is possible to form two exact copies of the original ball. The project consists of four chapters, and an introduction to previous concepts: the basics on group actions and free groups. In the first chapter, the basic concepts and results about the paradox are introduced, and the original version of the paradox is proven. After that, the next chapter studies how to minimize the number of pieces used in the decomposition of the sphere and the ball, and it is proven that the minimal number of pieces to attain this goal are 4 and 5, respectively. This is done by proving that decompositions with this number of pieces exist, and decompositions with a smaller number of pieces do not. In the third chapter, we generalize the original paradox to other dimensions, with the added difficulty that an analogue paradox is not true in dimensions 1 or 2. Hence, to do this, we find weaker versions of the paradox, using the ideas of Von Neumann. The last chapter relates the theory of this kind of paradoxes with the study of measure in arbitrary sets. It introduces the concept of amenable group, and proves that the paradox is not true in dimensions 1 or 2. Finally, an appendix about the Axiom of Choice is included, where we explain the role of this axiom in the paradox.

A mis padres, Tomás e Isabel.

Resumen

El siguiente Trabajo de Fin de Grado trata un resultado sorprendente de S. Banach y A. Tarski, el cual afirma que una bola puede descomponerse en un número finito de piezas tales que, mediante rotaciones y traslaciones, pueden formar dos bolas exactamente iguales a la original. El trabajo está formado por cuatro capítulos y una introducción a algunos conceptos previos, exactamente, acciones de grupos y grupos libres. En el primer capítulo, se introducen los conceptos y resultados básicos en torno a este tipo de paradojas. También, las distintas versiones de la paradoja original se prueban aquí como corolarios. Tras esto, el siguiente capítulo estudia la minimización del número de piezas utilizado en la descomposición de la esfera y la bola. Se prueba que el número mínimo de piezas a utilizar en cada descomposición es 4 y 5, respectivamente. Para ello, se encuentran descomposiciones con estos números de piezas, y se demuestra que no existen descomposiciones con menos piezas. En el tercer capítulo, se generaliza la paradoja a cualquier dimensión, con la dificultad añadida de que ésta no es cierta en dimensiones 1 y 2. Para solventar este problema, encontramos versiones más débiles de la paradoja, utilizando las ideas de Von Neumann. El último capítulo relaciona la teoría de este tipo de paradojas con el estudio de la medida sobre conjuntos arbitrarios. Se introduce el concepto de grupo promediable, y se demuestra que la paradoja es falsa en dimensiones 1 y 2. Por último, se incluye un apéndice sobre el Axioma de Elección, en el cual se explica el papel que éste juega en la paradoja.

Agradecimientos

Agradecer a mis padres, Tomás e Isabel, su cariño, apoyo, ayuda y formación, así como a mi hermana Laura y al resto de mi familia.

A mi tutor, Dr. Enrique Pardo, por la gran ayuda prestada, la profesionalidad y la efectividad, y al resto de profesores que me han otorgado la formación necesaria para realizar este trabajo.

A todos mis amigos de Puerto Real, el Grado en Matemáticas y Helsinki, que me han escuchado y apoyado de tantas maneras.

Y, por último, a Nieves, por guiarme correctamente hacia las Matemáticas.

Diego.

julio 2018

Índice general

1	Introducción	1
2	Conceptos previos	7
2.1	Acciones de grupos	7
2.1.1	Ejemplos	8
2.2	Grupos libres	9
3	El Teorema de Banach-Tarski	13
3.1	Descomposiciones Paradójicas	13
3.2	La Paradoja de Hausdorff	17
3.2.1	La paradoja de Hausdorff original	19
3.3	Equidescomponibilidad y la Paradoja de Banach-Tarski	20
3.3.1	Equidescomponibilidad	20
3.3.2	El Teorema de Banach-Schröder-Bernstein	22
3.3.3	El Teorema de Banach-Tarski	24
4	Reducción del número de piezas	27
4.1	Descomposición minimal de la esfera	28
4.2	Descomposición minimal de la bola	31
5	Paradojas en otras dimensiones	35
5.1	Dimensiones superiores	35
5.2	Dimensiones inferiores	37
5.2.1	Comentario geométrico previo	37
5.2.2	Paradojas sobre el plano, \mathbb{R}^2	38
5.2.2.1	La paradoja de Von Neumann en el plano	39

ÍNDICE GENERAL

5.2.3	Paradojas sobre la recta, \mathbb{R}	42
5.2.3.1	La paradoja de Von Neumann sobre la recta.	44
6	Relación con la Teoría de la Medida	51
6.1	Introducción a la Teoría de la Medida	51
6.2	Grupos promediabiles	54
6.2.1	La condición de Følner	57
6.3	Aplicaciones a la recta real y el plano euclídeo	60
7	Conclusiones	61
A	El Axioma de Elección	63
	Bibliografía	67

Y tomando los cinco panes y los dos peces y levantando los ojos al cielo, bendijo, partió los panes y los dio a sus discípulos para que los distribuyesen; también partió los dos peces para todos. Y comieron todos hasta que quedaron satisfechos (...) Los que comieron eran cinco mil hombres.

Mc 6, 34-44

CAPITULO

1

Introducción

La Paradoja de Banach-Tarski es uno de los resultados más sorprendentes en Matemáticas. En términos sencillos, afirma que se puede romper una bola maciza en trozos, girar o trasladar cada uno de los trozos y, con las nuevas piezas, formar dos bolas idénticas a la primera. La paradoja también tiene una versión fuerte, la cual afirma que una esfera del tamaño de un guisante puede romperse en trozos y, aplicando isometrías a cada uno de ellos, obtener otra esfera del tamaño del sol.

Teorema 1.1. (Teorema de Banach-Tarski) Sea \mathbb{B} una bola en \mathbb{R}^3 . Existe una partición de \mathbb{B} en conjuntos $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset \mathbb{B}$, e isometrías $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_m$ de \mathbb{R}^3 de modo que

$$\bigcup_{i=1}^n \sigma_i(A_i) = \mathbb{B} = \bigcup_{j=1}^m \tau_j(B_j)$$

Teorema 1.2. (Teorema de Banach-Tarski, versión fuerte) Sean A, B dos bolas en \mathbb{R}^3 . Existe una partición de A en conjuntos A_1, \dots, A_n , e isometrías $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de \mathbb{R}^3 tales que

$$B = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(A_i)$$

Estos resultados son contrarios a nuestra intuición: físicamente, van en contra del Principio de conservación de la masa. El que un conjunto pueda ser congruente a un subconjunto propio suyo puede parecer inusual.

1. INTRODUCCIÓN

Lo que subyace detrás de la paradoja es el uso de conjuntos infinitos. Nuestra intuición se basa en el mundo finito, y por lo tanto el concepto del infinito ha producido, desde hace milenios, paradojas y resultados en contra de nuestro sentido común, siendo un tema delicado. Los primeros en estudiar la idea de infinito fueron los griegos con, por ejemplo, las paradojas de Zenón. Ante este tipo de resultados, los griegos optan por aceptar la existencia del infinito, pero lo evitan en la medida de lo posible. Mucho más tarde, en 1638, Galileo planta el germen de lo que será el estudio del infinito: el emparejamiento de elementos de dos conjuntos para estudiar cuál de ellos es “más grande”. En torno a 1870, siguiendo esta idea, Cantor empareja el conjunto de naturales con el de enteros, y más tarde con el de racionales. Además, se da cuenta de que estos conjuntos no podían emparejarse con los puntos de un segmento, o con los de una recta. Con esto, demuestra la existencia de distintos tipos de infinito y, algunos años más tarde, encuentra una forma de generar infinitos cada vez más grandes, mediante los conjuntos potencia. Las ideas de Cantor conducían en algunos casos a paradojas, y fueron criticadas por gran parte de la comunidad matemática.

Durante esta misma época, la Matemática vive un período convulso: se están intentando fundamentar las bases lógicas de la Matemática. Las ideas de Cantor darán lugar a la corriente que, a día de hoy, es mayoritaria: la Teoría de Conjuntos. Ésta consiste en un sistema formal de 8 a 10 axiomas (dependiendo de la formulación), realizado por E. Zermelo en 1908, con contribuciones de A. Fränkel en 1922, y refinada por Von Neumann en 1925. Estos axiomas son razonables, y habían sido utilizados implícitamente en trabajos previos. Zermelo únicamente formalizó la teoría. Esta axiomatización solventaba algunas paradojas y dificultades de la teoría de los infinitos de Cantor. No obstante, uno de estos axiomas genera gran polémica: el Axioma de Elección (AC).

Todos los demás axiomas de Zermelo permiten conocer cuáles son los elementos de un conjunto al construirlo. El Axioma de Elección afirma que, dada una familia arbitraria de conjuntos, existe un conjunto que contiene a un elemento de cada uno de ellos. Ahora bien, no especifica cuáles, y por lo tanto no podemos saber exactamente cuáles son los elementos del conjunto en cuestión. Este axioma conduce a resultados muy útiles, tales como el Teorema de Hahn-Banach, herramienta básica del Análisis Funcional. Sin embargo, también lleva a resultados contraintuitivos, y por lo tanto muchos matemáticos prefieren evitarlo. Uno de estos resultados será la existencia de conjuntos no medibles.

En 1901, H. Lebesgue, en un intento de generalizar la integral de Riemann a un número mayor de funciones, introduce la Medida de Lebesgue, una generalización de la idea de

longitud a todos los subconjuntos de la recta real. Ahora bien, en 1905, G. Vitali encuentra, utilizando el Axioma de Elección, un conjunto al cuál no puede ser asignada una medida. Esta construcción es muy criticada por el uso que hace de AC. Casi diez años más tarde, en 1914, Hausdorff utiliza la existencia de conjuntos no medibles para probar un resultado aparentemente paradójico:

Teorema 1.3. (Hausdorff) *Existe una partición de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ en conjuntos A, B, C, D , de modo que D es numerable, y existen isometrías σ, τ de \mathbb{R}^3 de forma que $\sigma(A) = B \cup C$, $\tau(A) = B$, $\tau^2(A) = C$.*

En este sentido, D es un conjunto relativamente pequeño en \mathbb{S}^2 , y, como A, B, C son congruentes, cada uno de ellos representa casi un tercio de la esfera. Al mismo tiempo, como A es congruente con $B \cup C$, A también representa casi dos tercios de la esfera. Esta construcción puede usarse para generar dos copias de $\mathbb{S}^2 \setminus D$ a partir de una. También Hausdorff recibe críticas por su resultado. Borel escribe «La contradicción tiene su origen en la aplicación del Axioma de Elección de Zermelo. Cuando uno desprecia la precisión y la lógica, llega a contradicciones».

Partiendo de este resultado, Banach y Tarski, ambos polacos, encuentran independientemente, en 1924, una forma de extender la paradoja de Hausdorff a toda la esfera, y tras esto, a toda la bola unidad. Además, prueban que el mismo resultado no es posible en dimensiones 1 y 2. Publican su artículo *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* en una famosa revista polaca, *Fundamenta Mathematicae*. El que la paradoja pudiera anunciarse en términos sencillos hizo que el teorema llegara a una gran cantidad de gente y llamara mucho la atención de la comunidad matemática. El teorema fue, una vez más, controvertido y criticado por el uso que hacía del Axioma de Elección. Lo interesante es que Banach y Tarski también necesitan del Axioma de Elección para demostrar que la paradoja no es cierta en dimensiones inferiores a 3, y por lo tanto su rechazo también deduciría resultados de alguna forma contraintuitivos.

La discusión con el Axioma de Elección tarda muchos más años en resolverse. Gödel demuestra en 1940 que AC es consistente con los demás axiomas de Zermelo-Fränkel (ZF), es decir, no contradice ninguno de estos. En 1963, Cohen prueba que la negación de AC es también consistente con ZF. De este modo, AC es indecidible dentro de ZF.

Además del papel que juega la Paradoja de Banach-Tarski en matemáticas fundamentales, y las ideas que plantea en torno al Axioma de Elección, la paradoja ha sido fructífera en la investigación matemática. Ha dado lugar a conceptos que desarrollarían nuevas áreas de

1. INTRODUCCIÓN

estudio, como la promediabilidad de grupos. A día de hoy, estos grupos se siguen estudiando y aplicando en diversas áreas de la matemática por sus buenas propiedades. Las ideas tras la paradoja de Banach-Tarski pueden utilizarse también para demostrar la unicidad de la medida de Lebesgue, y la cuadratura del círculo.

A lo largo del siglo XX, las descomposiciones paradójicas han seguido siendo estudiadas de distintas formas. Además de los resultados que se incluyen en este trabajo, cabe mencionar que es posible obtener, a partir de una esfera, una familia de esferas con el cardinal del continuo. También, existen paradojas análogas que utilizan conjuntos algo más tratables (conjuntos de Baire), y paradojas en las que el movimiento de las piezas no permite que choquen unas con otras.

Muchas veces se ha planteado a qué nivel la paradoja es cierta en el mundo físico. Por supuesto, es imposible llegar a un nivel de precisión en el que podamos rotar piezas de forma exacta, o construir el tipo de conjuntos que utiliza la paradoja. No obstante, en 1995 se publicó un artículo ([10]) en el que se plantea un modelo físico en el que algunas partículas podrían comportarse de forma similar a las piezas del Teorema de Banach-Tarski.

En este trabajo desarrollamos algunos temas relacionados con la paradoja, siguiendo como base el libro de S. Wagon [19], el cual recoge la gran mayoría de información que existe sobre este tema.

El primer capítulo se centra en formalizar algunos conceptos y resultados relacionados con este tipo de paradojas, y demostrar las distintas versiones del Teorema de Banach-Tarski. A partir de aquí, el trabajo puede leerse en cualquier orden, pues los demás capítulos orbitan en torno a este y, salvo algunas excepciones, son independientes entre sí.

El segundo capítulo consiste en reducir el número de piezas en las que hace falta romper la esfera o la bola para poder obtener una segunda copia. Se adaptan algunos resultados del capítulo anterior y se introducen nuevas técnicas para realizar este tipo de paradojas, utilizando por ejemplo acciones localmente conmutativas.

El tercer capítulo generaliza las descomposiciones a cualquier dimensión. Se comienza obteniendo una paradoja en dimensiones superiores de forma inductiva. Tras esto, dado que una paradoja usando isometrías no es cierta en dimensión 1 y 2, se utilizan las ideas de Von Neumann para obtener paradojas un poco más débiles en estos espacios.

El cuarto capítulo relaciona la existencia de paradojas con la Teoría de la Medida. Se introducen los grupos promediabiles y se demuestra que la paradoja no es cierta en dimensiones 1 y 2.

Por último, se incluye un apéndice en torno al Axioma de Elección, y el papel que juega en la paradoja.

Se recomienda al lector familiaridad con la Teoría de Grupos, aunque se incluye un capítulo de conceptos previos en torno a acciones de grupos y grupos libres, los cuales constituirán la base del trabajo. También, es útil conocer la medida de Lebesgue y, en el tercer capítulo, poseer conocimientos básicos de Teoría de Grafos.

Conceptos previos

2.1 Acciones de grupos

Definición 2.1. Dados un grupo, G , y un conjunto, X , diremos que G **actúa** sobre X por la izquierda, o que X es un **G-conjunto**, si existe una aplicación

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow g \cdot x \end{aligned}$$

tal que, si $g_1, g_2 \in G$, y $x \in X$,

1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$.
2. $1 \cdot x = x$.

Definición 2.2. Diremos que una acción es **propia**, o que el grupo **actúa sin puntos fijos** (no triviales), si para todo $g \in G$, $x \in X$, se tiene: $g \cdot x = x \Rightarrow g = 1$.

Sea $S(X)$ el grupo de permutaciones de X . Podemos interpretar una acción como un homomorfismo $\phi: G \rightarrow S(X)$ dado por

$$\begin{aligned} g \rightarrow \phi_g: \quad X &\rightarrow X \\ x &\rightarrow g \cdot x \end{aligned}$$

Es fácil ver que esta definición de acción es equivalente a la anterior. La acción será propia si y solo si ϕ es inyectivo. Escribiremos indistintamente $g(x) = g \cdot x = gx$.

2. CONCEPTOS PREVIOS

2.1.1 Ejemplos

Ejemplo 2.1. Todo grupo actúa por la izquierda sobre sí mismo:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\rightarrow gh \end{aligned}$$

De las propiedades de grupo se deriva que $g(hk) = (gh)k$ y $1g = g$ para todo $g, h, k \in G$. Análogamente, cualquier subgrupo actúa también sobre el grupo total.

Ejemplo 2.2. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$, de matrices $n \times n$ con determinante no nulo, actúa sobre \mathbb{R}^n mediante la correspondiente aplicación lineal asociada a la matriz:

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (M, x) &\rightarrow M(x) \end{aligned}$$

De la misma forma, también lo hacen sus subgrupos. En particular, nos interesará la acción de SO_3 , matrices 3×3 , ortogonales y con determinante 1. Las aplicaciones lineales asociadas a dichas matrices se corresponden con las isometrías del espacio euclídeo (\mathbb{R}^3, \cdot) que mantienen la orientación.

Definición 2.3. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Dado $x \in X$, llamaremos **órbita** de x al conjunto:

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Una acción se dice **transitiva** si todos los elementos están sobre la misma órbita.

Proposición 2.1. Sea G un grupo y X un G -conjunto. El conjunto de órbitas de elementos en X forma una partición de X .

Demostración. Es claro que $\mathcal{O}_x \subseteq X$ para todo $x \in X$. Por otro lado, si $x \in X$, entonces $x = 1 \cdot x$, luego $x \in \mathcal{O}_x$, y por tanto: $X = \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$.

Veamos ahora que las órbitas son iguales o disjuntas dos a dos. Sean $x_1, x_2 \in X$ tal que $\mathcal{O}_{x_1} \cap \mathcal{O}_{x_2} \neq \emptyset$. Sea $y \in \mathcal{O}_{x_1} \cap \mathcal{O}_{x_2}$. Existen entonces $g_1, g_2 \in G$ tales que:

$$y = g_1 \cdot x_1 = g_2 \cdot x_2.$$

Aplicando a cada lado g_1^{-1} , se tiene $x_1 = (g_1^{-1}g_2) \cdot x_2$, luego $x_1 \in \mathcal{O}_{x_2}$, y de aquí, por definición de órbita, $\mathcal{O}_{x_1} \subseteq \mathcal{O}_{x_2}$. De forma simétrica, vemos que $x_2 = (g_2^{-1}g_1) \cdot x_1$ y por tanto $\mathcal{O}_{x_2} \subseteq \mathcal{O}_{x_1}$. \square

2.2 Grupos libres

Definición 2.4. Sea F un grupo, y sea X un conjunto para el cual existe $j: X \rightarrow F$ inyectiva. Diremos que F es un **grupo libre** con base X si, para todo grupo G , y toda aplicación $f: X \rightarrow G$, existe un único homomorfismo $\Phi: F \rightarrow G$ extendiendo f , esto es, tal que $\Phi \circ j = f$.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ j \uparrow & \searrow \Phi & \\ X & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

La aplicación j puede entenderse como una inclusión de X en F , de modo que podamos identificar X con un subconjunto de F , y el grupo libre como una extensión del conjunto inicial.

Existen varias formas de definir el grupo libre. En nuestro caso, lo definimos mediante la propiedad universal, y demostramos que esta propiedad lo caracteriza (unicidad) y que hay un grupo con tal propiedad (existencia).

Teorema 2.1. *Dado un conjunto X , el grupo libre con base X es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean F, F' grupos libres con base X , e inyecciones $\alpha: X \rightarrow F, \beta: X \rightarrow F'$. Existen entonces morfismos $\tilde{\alpha}: F' \rightarrow F, \tilde{\beta}: F \rightarrow F'$, de modo que $\tilde{\beta} \circ \alpha = \beta$, y $\tilde{\alpha} \circ \beta = \alpha$. Probaremos que $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} = Id_F$, y $\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha} = Id_{F'}$, de modo que $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}^{-1}$. Nótese:

$$(\tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}) \circ \alpha = \tilde{\alpha} \circ (\tilde{\beta} \circ \alpha) = \tilde{\alpha} \circ \beta = \alpha.$$

Se tienen entonces los diagramas siguientes:

$$\begin{array}{ccc} F & & F \\ \alpha \uparrow & \searrow \tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta} & \\ X & \xrightarrow{\alpha} & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F & & F \\ \alpha \uparrow & \searrow Id_F & \\ X & \xrightarrow{\alpha} & F \end{array}$$

Por unicidad, se tiene $Id_F = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}$. De forma simétrica, $Id_{F'} = \tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha}$. □

Veamos ahora que estos grupos existen: Sea X un conjunto, y sea X^{-1} otro conjunto disjunto de X , del mismo cardinal. Sea $\phi: X \rightarrow X^{-1}$ biyectiva, y denotemos $x^{-1} := \phi(x)$. Por otro lado, sea X' un conjunto de un solo elemento, disjunto de $X \cup X^{-1}$. Denotaremos este único elemento por 1. Denotamos también $x^1 := x$ y $x^0 := 1$, para todo $x \in X$.

2. CONCEPTOS PREVIOS

Definición 2.5. Una **palabra** en X es una sucesión $w = (a_1, a_2, \dots)$, donde $a_i \in X \cup X^{-1} \cup 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y de forma que existe $n \geq 0$ tal que $a_i = 1$ para todo $i > n$. A la palabra $(1, 1, \dots)$ se le llama palabra vacía, y la denotaremos por e , o 1 , si no da lugar a confusión.

Es común utilizar la siguiente notación para palabras en un alfabeto:

$$w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n},$$

donde ϵ_i vale $0, 1$, ó -1 , y $\epsilon_n = \pm 1$ (para que la representación sea finita). Definiremos la **longitud** de una palabra como el valor n en esta representación.

Definición 2.6. Dada una palabra $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, se define su **palabra inversa**

$$w^{-1} = x_n^{-\epsilon_n} x_{n-1}^{-\epsilon_{n-1}} \dots x_1^{-\epsilon_1}$$

Definición 2.7. Una palabra w en X se dice **reducida** si satisface las condiciones siguientes:

1. x y x^{-1} no son nunca adyacentes.
2. Si $a_m = 1$ para algún m , entonces $a_k = 1$ para $k > m$.

Esto es, una palabra es reducida si no se pueden realizar “cancelaciones”, y no aparece propiamente el elemento neutro.

Definición 2.8. Se dirá que v es una **subpalabra** de $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$ si v es la palabra vacía, o $v = x_i^{\epsilon_i} \dots x_j^{\epsilon_j}$, donde $1 \leq i \leq j \leq n$.

Consideremos el conjunto de palabras reducidas en X . Podemos definir la siguiente operación entre dos palabras: dados $w = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n}$, $v = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$, definimos

$$wv = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$$

Ahora bien, la palabra resultante podría no estar reducida, y por tanto esta operación no está bien definida. Este caso se debería a que hubiera una subpalabra de w , w_2 , de modo que $w = w_1 w_2$ y v fuera de la forma $v = w_2^{-1} v_1$. Definimos entonces la operación como $wv = w_1 v_1$, palabra que sí estará reducida.

En resumen, la operación yuxtapone las palabras y cancela las subpalabras triviales, $(x^\epsilon x^{-\epsilon} \text{ ó } 1)$. Es fácil ver ahora que este conjunto forma un grupo respecto a esta operación, siendo el elemento neutro la palabra vacía, y el inverso de cada palabra, su palabra inversa. Se puede probar lo siguiente:

Teorema 2.2. *Dado un conjunto X , el conjunto de palabras reducidas en X es un grupo libre con base X .*

Gracias a la unicidad del grupo libre, también se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.3. *Dos grupos libres son isomorfos si y sólo si sus correspondientes bases tienen el mismo cardinal.*

Definición 2.9. Se define el **rango** de un grupo libre como el cardinal de todas sus bases.

Esto nos permite hablar del *grupo libre en n generadores*, $n \in \mathbb{N}$, del *grupo libre de rango numerable*, etc.

Uno de los puntos fundamentales del Teorema de Banach-Tarski, y de toda la teoría que vendrá a continuación, se basa en la acción del grupo libre en dos generadores sobre sí mismo.

-¿Cuál es un anagrama de “Banach-Tarski”?
 +”Banach-Tarski Banach-Tarski”

CAPITULO

3

El Teorema de Banach-Tarski

3.1 Descomposiciones Paradójicas

Comenzamos introduciendo la noción de descomposición paradójica, que formaliza el hecho de ser congruente a piezas a dos subconjuntos propios disjuntos:

Definición 3.1. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Sea $E \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Diremos que E es **finitamente G -paradójico** si existen $m, n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset E$, disjuntos dos a dos, y $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$, tales que

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i), \quad E = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j).$$

De igual forma, podemos generalizar esta definición a un cantidad numerable de piezas:

Definición 3.2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Sea $E \subset X$ un subconjunto no vacío. Diremos que E es **numerablemente G -paradójico** si existen A_i, B_j , para $i, j \in \mathbb{N}$, subconjuntos de E disjuntos dos a dos, y $g_i, h_j \in G$, con $i, j \in \mathbb{N}$, tales que:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(A_i), \quad E = \bigcup_{j=1}^{\infty} h_j(B_j).$$

Cabe destacar que nada impide que A_i, B_j sean vacíos, y por lo tanto ser finitamente paradójico es una condición más restrictiva. Podríamos continuar extendiendo este concepto, y considerar descomposiciones paradójicas con una cantidad no numerable de piezas. Sin embargo, para este caso la paradoja de Banach-Tarski sería trivial, pues como una esfera tiene el mismo cardinal que dos esferas, podríamos establecer una biyección de una

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

esfera en dos, y trasladar cada punto de la primera esfera a su imagen mediante un movimiento. En general, cualesquiera dos subconjuntos de \mathbb{R}^n con la misma cardinalidad son congruentes a trozos, utilizando una cantidad no numerable de éstos.

Vemos algunos ejemplos de descomposiciones paradójicas.

Ejemplo 3.1. \mathbb{N} es finitamente paradójico respecto al grupo de biyecciones en \mathbb{Z} .

La acción que consideramos es, para $n \in \mathbb{N}$, $f \in \text{Biy}(\mathbb{Z})$, $f \cdot n = f(n)$. Sean

$$P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \quad I = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

los naturales pares e impares respectivamente. Sabiendo que todo subconjunto infinito de \mathbb{Z} es numerable, se tiene que $|\mathbb{Z} \setminus P| = |\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}|$, y $|P| = |\mathbb{N}|$. Así, existen biyecciones $f_1: \mathbb{Z} \setminus P \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $f_2: P \rightarrow \mathbb{N}$. Consideremos la aplicación $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, dada por

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \in \mathbb{Z} \setminus P, \\ f_2(z) & \text{si } z \in P. \end{cases}$$

Por construcción, f es biyectiva y $f(P) = \mathbb{N}$,

De forma análoga, podemos construir biyecciones $g_1: \mathbb{Z} \setminus I \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $g_2: I \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con $g(I) = \mathbb{N}$. En conclusión, $f(P) = \mathbb{N} = g(I)$, siendo $\mathbb{N} = P \cup I$.

Ejemplo 3.2. El grupo libre en dos generadores es finitamente paradójico respecto a sí mismo.

Sea F el grupo libre con generadores σ, τ . Para $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, sea $W(\rho)$ el conjunto de palabras que comienzan por ρ en F . Nótese que el segundo símbolo de una palabra en $W(\rho)$ no puede ser ρ^{-1} , pues entonces la palabra no estaría reducida. Tenemos la siguiente partición de F :

$$F = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}).$$

Ahora, si $\omega \in F$ no empieza por σ , entonces $\sigma^{-1}\omega \in W(\sigma^{-1})$. Recíprocamente, si $z \in W(\sigma^{-1})$, entonces la segunda letra de z no puede ser σ . Así, se verifica

$$\sigma(W(\sigma^{-1})) = F \setminus W(\sigma) = \{1\} \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}).$$

Y por lo tanto,

$$F = W(\sigma) \cup \sigma(W(\sigma^{-1})).$$

De forma simétrica, se ve que $F = W(\tau) \cup \tau(W(\tau^{-1}))$, concluyendo el resultado.

Ejemplo 3.3. (AC) \mathbb{S}^1 es numerablemente $SO_2(\mathbb{R})$ -paradójico.

Identificamos ambos \mathbb{S}^1 y SO_2 con la circunferencia compleja, $\{e^{ri} : r \in \mathbb{R}\}$ (la rotación de ángulo θ se obtiene multiplicando por $e^{\theta i}$). Consideremos en \mathbb{S}^1 la siguiente relación de

equivalencia: dados $a, b \in \mathbb{S}^1$, diremos que $a \sim b$ si existe $\rho = e^{2\pi qi} \in SO_2, q \in \mathbb{Q}$, tal que $b = \rho(a)$. Como los racionales son numerables, sólo existe una cantidad numerable de rotaciones de esta forma. Las enumeramos, como $\{\rho_i : i \in \mathbb{N}\}$. Sea M un conjunto formado tomando un único elemento de cada clase de equivalencia. Definimos $M_i := \rho_i(M)$. Es sencillo comprobar que $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ forma una partición de \mathbb{S}^1 , y cada dos M_i, M_j son congruentes, pues $M_j = \rho_j \rho_i^{-1}(M_i)$. Además, como los pares, P , son numerables, existe una biyección de P en \mathbb{N} . Así, podemos rotar, independientemente, cada M_{2i} , hasta cubrir todos los M_i . En particular, si ρ'_i lleva M_{2i} a M_i :

$$\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho'_i(M_{2i})$$

De la misma forma, podemos hacer esto con los índices impares, obteniendo la descomposición paradójica.

Ejemplo 3.4. (AC) *El intervalo $[0, 1)$ es numerablemente paradójico respecto al grupo de traslaciones módulo 1.*

La misma idea del ejemplo anterior funciona en este caso. Podemos pensar en ello como si rompemos la circunferencia por el punto $(1, 0)$ y la estiramos sobre la recta real. El grupo de traslaciones módulo 1 se comporta de la misma forma en que SO_2 actúa sobre la circunferencia. Además, cada traslación módulo 1 es una traslación a trozos. De este modo, aumentando el número de piezas podemos afirmar que $[0, 1)$ es numerablemente paradójico respecto al grupo de traslaciones en \mathbb{R} .

En los dos últimos ejemplos, el Axoma de Elección aparece en el momento en que consideramos el conjunto M . De cada clase de equivalencia hemos elegido, arbitrariamente, un solo elemento, y hemos formado un conjunto con estos. Veremos que tanto en este ejemplo, como en muchos otros resultados, es necesaria la aparición de este axioma. No obstante, observamos cómo el Axioma de Elección no aparece en los Ejemplos 3.1 y 3.2. Así, pese a estar ligados, la existencia de descomposiciones paradójicas no es una consecuencia directa del Axioma de Elección.

El siguiente teorema será fundamental en la teoría posterior, ya que nos permitirá trasladar descomposiciones paradójicas de un grupo a un conjunto sobre el que actúa y viceversa.

Teorema 3.1. (AC) *Sea G un grupo que actúa de forma propia sobre un conjunto X . Entonces, G es G -paradójico si y sólo si X es G -paradójico.*

Demostración. \Rightarrow Supongamos que $G = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$ es la descomposición paradójica de G . Sea M un conjunto formado por un elemento de cada órbita en X . Veamos que $\{g(M) : g \in G\}$ forma una partición de X :

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Si $x \in X$, existe $y \in \mathcal{O}_x \cap M$ tal que $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$, y por lo tanto $x \in g^{-1}(M)$. También, $g(M) \subset X$ para todo $g \in G$. Así, $X = \bigcup_{g \in G} g(M)$.

Por otro lado, si $x \in g_1(M) \cap g_2(M)$, entonces existen $y_1, y_2 \in M$ tales que $g_1 \cdot y_1 = x = g_2 \cdot y_2$. Por la definición de M , $y_1 = y_2$, y como el grupo actúa sin puntos fijos, debe ser $g_1 = g_2$. Consideremos ahora, para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, los conjuntos

$$A'_i = \bigcup_{g \in A_i} g(M) = A_i(M), \quad B'_j = \bigcup_{h \in B_j} h(M) = B_j(M).$$

Como la acción es propia, y los conjuntos A_i, B_j eran todos disjuntos, estos nuevos conjuntos también lo son. Además,

$$\bigcup_{i=1}^n g_i(A'_i) = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i(M)) = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i)(M) = G(M) = X.$$

De la misma forma, $\bigcup_{j=1}^m h_j(B'_j) = X$, luego X es G -paradójico.

\Leftarrow Supongamos ahora que $X = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j)$ es una descomposición paradójica. Fijemos $x_0 \in X$, y consideremos los conjuntos

$$A'_i = \{g \in G : g \cdot x_0 \in A_i\}, \quad B'_j = \{h \in G : h \cdot x_0 \in B_j\}$$

Como A_i, B_j son disjuntos dos a dos, estos conjuntos también lo son.

Ahora bien, si $g \in G$, entonces $g \cdot x_0 \in X$, luego, mediante la descomposición paradójica, existen $i \in \{1, \dots, n\}$, $g_i \in G$, $a_i \in A_i$, tales que $g \cdot x_0 = g_i \cdot a_i$. De aquí, $a = (g_i^{-1}g) \cdot x_0$, luego $g_i^{-1}g \in A'_i$, y $g \in g_i A'_i$. De esta forma,

$$G = \bigcup_{i=1}^n g_i(A'_i).$$

Análogamente se obtiene $G = \bigcup_{j=1}^m h_j(B'_j)$.

□

Es destacable que la descomposición de X utiliza el mismo número de piezas que la descomposición de G . Esto será relevante en el capítulo siguiente, al intentar minimizar el número de piezas que utilizamos en la descomposición.

Corolario 3.1. (AC) *Todo grupo conteniendo un subgrupo paradójico es paradójico.*

Demostración. El subgrupo actúa sobre el grupo total, según vimos en los conceptos previos. Además, la acción no tiene puntos fijos: si H, G son grupos, y $H \leq G$, $h \in H$, $g \in G$, entonces $hg = h \Rightarrow g = 1$. □

Estos dos resultados serán la base de las descomposiciones paradójicas que realizaremos. La estrategia en todos los casos será la siguiente: dado un conjunto X , encontraremos una acción de un grupo paradójico sobre X . Aunque esta acción no será necesariamente propia, podremos eliminar el conjunto de puntos fijos no triviales en X , llamémoslo D , y obtendremos una descomposición de $X \setminus D$. Si D es lo suficientemente pequeño, podremos suprimirlo y obtener una descomposición del conjunto total.

3.2 La Paradoja de Hausdorff

Seguiremos aquí la estrategia planteada al final de la sección anterior. Lo primero será buscar una acción del grupo libre sobre la esfera. Para ello, encontramos elementos en $SO_3(\mathbb{R})$ que generan un grupo libre de rango 2:

Proposición 3.1. *Consideremos las siguientes isometrías $\phi, \rho \in SO_3(\mathbb{R})$.*

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

El grupo $F = \langle \phi, \rho \rangle$ es libre de rango 2. En particular, para $n \geq 3$, $SO_n(\mathbb{R})$ contiene un grupo libre de rango 2.

Demostración. La última afirmación se deduce de que si $m \leq n$, SO_n contiene un subgrupo isomorfo a SO_m .

En primer lugar, destacamos que como $\phi, \rho \in SO_3$, se tiene $\phi^{-1} = \phi^T, \rho^{-1} = \rho^T$. Probaremos que ninguna palabra reducida no trivial en $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$ es la identidad, de modo que no haya relaciones en el grupo.

Sea w una palabra de este tipo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que w termina (por la derecha) por $\phi^{\pm 1}$. Si no fuera así, podemos conjugar por ϕ , pues $w = Id \Leftrightarrow \phi^{-1}w\phi = Id$. Probaremos por inducción sobre la longitud de w que

$$w(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k,$$

donde $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$ y b no es divisible por 3. De aquí se deduce $w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$, y por lo tanto $w \neq Id$.

Lo hacemos por inducción sobre la longitud de w :

Si $l(w) = 1$, entonces $w = \phi^{\pm 1}$, luego $w(1, 0, 0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3$.

Si $l(w) = n$, supongamos que el resultado se da para longitud $n - 1$. Podemos escribir $w = \phi^{\pm 1}w'$, ó $w = \rho^{\pm 1}w'$, donde $l(w') = n - 1$, y por tanto $w'(1, 0, 0)$ tiene la forma anterior. Al aplicar $\phi^{\pm 1}$, obtenemos $w(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, con $a = a' \mp 4b'$, $b = b' \pm 2a'$, $c = 3c'$. Al aplicar $\rho^{\pm 1}$, $a = 3a'$, $b = b' \mp 2c'$, $c = c' \pm 4b'$. En cualquier caso, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Veamos ahora que $3 \nmid b$:

Supongamos $w = \sigma_1 \sigma_2 v$, con $v(1, 0, 0) = (a'', b'', \sqrt{2}, c'')/3^{k-2}$, y $\sigma_i \in \{\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}\}$. Fijamos también la notación $\sigma_2 v(1, 0, 0) = (a', b' \sqrt{2}, c')/3^{k-1}$.

Aparecen cuatro posibles casos:

1. $w = \rho^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v$. Se tiene $c' = 3c''$, y $b = b' \mp 2c'$. Como $3 \mid c'$, es $b \equiv b' \pmod{3}$. Concluimos que si $3 \nmid b'$, entonces $3 \nmid b$.
2. $w = \phi^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v$. Se tiene $a' = 3a''$, y $b = b' \mp 2a'$. El mismo argumento anterior indica que si $3 \nmid b'$ entonces $3 \nmid b$.
3. $w = \phi^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v$. Se tiene:

$$b = b' \pm 2a' = b'' \pm 2a'' \pm 2(a'' \mp 4b'') = -7b'' \pm 4a'' = -9b'' + 2b'.$$

De modo que $b \equiv 2b' \pmod{3}$, y por tanto si $3 \nmid b'$ entonces $3 \nmid b$.

4. $w = \rho^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v$. Se tiene:

$$b = b' \mp 2c' = b'' \mp 2c'' \mp 2(c'' \pm 4b'') = -7b'' \mp 4c'' = -9b'' + 2b'.$$

Obtenemos el mismo resultado que en el apartado anterior.

De este modo, si $3 \nmid b'$ entonces $3 \nmid b$, y por lo tanto completamos la demostración. □

Definición 3.3. Dos rotaciones se dicen **independientes** si generan un grupo libre.

Existen muchas formas de encontrar rotaciones independientes en $SO_3(\mathbb{R})$. De hecho, se puede demostrar que, si damos la topología producto a $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$, entonces el conjunto

$$\{(\sigma, \tau) \in SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R}) : \sigma, \tau \text{ son independientes}\}.$$

es denso en $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$. El lector interesado puede consultarlo en [19].

Con estas rotaciones, podemos ya obtener una descomposición paradójica sobre casi toda la esfera, tal como hace Hausdorff en su paradoja original:

Teorema 3.2. *Existe un subconjunto numerable D de la esfera \mathbb{S}^2 tal que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es $SO_3(\mathbb{R})$ -paradójico.*

Demostración. Sea $F = \langle \phi, \rho \rangle$. La acción de F sobre la esfera unidad no es propia, pues cada giro fija dos puntos en la esfera: las intersecciones de su eje con ésta. Ahora bien, sea

$$D = \{x \in \mathbb{S}^2 : \text{Existe } \sigma \in F \text{ tal que } \sigma(x) = x\}.$$

Como F es numerable y cada rotación fija dos puntos, se tiene que D es numerable. Además, si $P \in \mathbb{S}^2 \setminus D$, y $g \in F$, entonces $g(P) \in \mathbb{S}^2 \setminus D$. En efecto, si $h \in F$ fija a $g(P)$, entonces $g^{-1}hg(P) = P$, y P sería un punto fijo. De esta forma, F actúa sin puntos fijos sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$. Aplicando el Teorema 3.1 y el Corolario 3.1 concluimos que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es $SO_3(\mathbb{R})$ -paradójico. □

3.2.1 La paradoja de Hausdorff original

La paradoja de Hausdorff original descomponía la esfera unidad \mathbb{S}^2 en cuatro conjuntos A, B, C, D , de forma que D es numerable, y existen giros ρ, τ tales que

$$\rho(A) = B \cup C, \quad \tau(A) = B, \quad \tau^2(A) = C.$$

Informalmente, tenemos un conjunto “pequeño”, D , y tres conjuntos “del mismo tamaño”, congruentes entre sí, que dividen el resto de la esfera. Sin embargo, A también es congruente con $B \cup C$, de forma que A representa simultáneamente un tercio y dos tercios de $\mathbb{S}^2 \setminus D$, lo cual es contraintuitivo.

Esta descomposición también nos permite, en la línea que estamos siguiendo, demostrar que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es $SO_3(\mathbb{R})$ -paradójico. En efecto, si dividimos $A = A_1 \cup A_2$, de tal forma que $\rho(A_1) = B, \rho(A_2) = C$, es sencillo comprobar que:

$$\tau^{-1}\rho(A_1) = A, \quad \rho\tau^{-2}\rho(A_2) = B \cup C.$$

Y de aquí,

$$\mathbb{S}^2 \setminus D = \tau^{-1}\rho(A_1) \cup \rho\tau^{-2}\rho(A_2).$$

Por otro lado, también tenemos:

$$\rho\tau^{-1}(B) = B \cup C, \quad \tau^{-2}(C) = A.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{S}^2 \setminus D = \rho\tau^{-1}(B) \cup \tau^{-2}(C).$$

es una descomposición paradójica de $\mathbb{S}^2 \setminus D$.

Recíprocamente, Hausdorff también utilizaba, en el fondo, la propiedad de que SO_3 sea paradójico. En su demostración original, los giros mencionados anteriormente, τ, ρ , de ángulos π y $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente, generan el grupo $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Se puede comprobar que las

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

rotaciones $\rho\tau\rho$ y $\tau\rho\tau\rho\tau$ son independientes. De esta forma, el grupo utilizado por Hausdorff contiene una copia del grupo libre en dos generadores. Con estas rotaciones podemos realizar el mismo proceso que en la demostración del Teorema 3.3 para obtener una descomposición paradójica de $\mathbb{S}^2 \setminus E$, donde E es numerable. Así se tiene que, pese a que ambas paradojas parecen seguir caminos distintos, esencialmente utilizan la misma idea.

3.3 Equidescomponibilidad y la Paradoja de Banach-Tarski

Llegados a este punto tenemos una descomposición paradójica de casi toda la esfera. Esto de por sí ya es contraintuitivo, y permite deducir resultados interesantes en Teoría de la Medida, tales como que la esfera no admite una medida numerablemente aditiva e invariante por rotaciones. Discutiremos esto más adelante.

En esta sección desarrollamos técnicas que permiten suprimir el conjunto D , para obtener finalmente una descomposición paradójica de la esfera completa. En líneas generales probaremos que, girando correctamente piezas de $\mathbb{S}^2 \setminus D$, podemos obtener nuevos puntos hasta llenar la esfera por completo. Esto nos permitirá llevar la descomposición que ya tenemos a todo \mathbb{S}^2 . Por último, también demostramos la paradoja sobre cualquier bola y sobre el propio \mathbb{R}^3 . Como corolario, usando el Teorema de Banach-Schröder-Bernstein obtenemos la forma fuerte del teorema, también conocida como “Paradoja del guisante y el Sol”.

3.3.1 Equidescomponibilidad

Sean dos conjuntos, A, B , tales que podemos transformar A en B de forma biyectiva. Podemos entonces transformar B en A realizando la transformación inversa. Ahora, si B es paradójico, tiene sentido preguntarse si podríamos transformar A en B , realizar la descomposición paradójica aquí, y obtener una descomposición paradójica de A a partir de ésta. En este apartado formalizamos todas estas ideas.

Definición 3.4. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Sean $A, B \subseteq X$. Diremos que A y B son **G -equidescomponibles** (en n piezas), denotado por $A \sim_G B$, si existen particiones de A y B , $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\{B_i : 1 \leq i \leq n\}$, y $g_1, \dots, g_n \in G$, tales que $g_i(A_i) = B_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Si no hay lugar a confusión, denotaremos simplemente $A \sim B$, o, si el número de piezas es relevante, $A \sim_n B$.

3.3 Equidescomponibilidad y la Paradoja de Banach-Tarski

Intuitivamente, podemos dividir A en piezas, hacer actuar al grupo sobre cada una de ellas independientemente, y formar B con estas nuevas piezas.

Podemos obtener una relación más débil permitiendo una cantidad numerable de piezas. En este caso, diremos que A y B son **numerablemente G -equidescomponibles** y denotaremos $A \sim_\infty B$. Todas las propiedades que probamos en este capítulo para el caso finito pueden realizarse para el caso numerable.

Proposición 3.2. \sim_G es una relación de equivalencia.

Demostración. Es claro que \sim_G es reflexiva y simétrica. Para la transitividad, veamos que si $A \sim_n B$, $B \sim_m C$, entonces $A \sim_{nm} C$.

Por hipótesis, tenemos particiones $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^n$, $\{B'_j\}_{j=1}^m$, $\{C_j\}_{j=1}^m$ y elementos $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$, tales que $g_i(A_i) = B_i$, $h_j(B'_j) = C_j$. Consideremos en A los conjuntos $A_i \cap g_i^{-1}(B'_j)$. Como g_i, h_j son biyecciones, también lo es $h_j g_i$. Como además los $A_i \cap g_i^{-1}(B'_j)$ son disjuntos, también lo serán $h_j g_i(A_i \cap g_i^{-1}(B'_j))$. Por último:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i,j} h_j g_i(A_i \cap g_i^{-1}(B'_j)) &= \bigcup_{i,j} h_j(B_i \cap B'_j) = \bigcup_{j=1}^m h_j((\bigcup_{i=1}^n B_i) \cap B'_j) = \\ &= \bigcup_{j=1}^m (B \cap B'_j) = \bigcup_{j=1}^m B'_j = C. \end{aligned}$$

De esta forma, $A \sim_{mn} C$. □

Podemos ahora reformular la propiedad de ser G -paradójico utilizando esta relación. De ambas definiciones se ve que E es G -paradójico si y sólo si existen $A, B \subset E$ disjuntos tales que $A \sim_G E$ y $B \sim_G E$. La siguiente proposición garantiza que la propiedad de ser paradójico se mantiene mediante la relación que acabamos de definir, y que por lo tanto ser paradójico es una propiedad de toda la clase de equivalencia.

Proposición 3.3. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Sean $E, E' \subseteq X$ tales que $E \sim_G E'$. Si E es G -paradójico, entonces E' también lo es.

Demostración. Sean $A, B \subset E$ tales que $A \sim E$, $B \sim E$. Supongamos que $E \sim E'$ mediante:

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad E' = \bigcup_{i=1}^n g_i(E_i), \quad g_i \in G.$$

Se tiene por definición que $A \sim \bigcup_{i=1}^n g_i(A \cap E_i) \subset E'$. Entonces,

$$E' \sim E \sim A \sim \bigcup_{i=1}^n g_i(A \cap E_i).$$

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

De forma simétrica, sobre B ,

$$E' \sim E \sim B \sim \bigcup_{i=1}^n g_i(B \cap E_i).$$

Lo que concluye el resultado. □

3.3.2 El Teorema de Banach-Schröder-Bernstein

Introducimos aquí una nueva forma de demostrar que dos conjuntos son equidescomponibles, consistente en una generalización del Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. Éste afirma que dados dos conjuntos A, B , si $|A| \leq |B|$, y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$. Banach adaptó la demostración del teorema original a la relación de equidescomponibilidad. Procedemos a definir una relación \preceq tal que si $A \preceq B$ y $B \preceq A$ entonces $A \sim B$.

Definición 3.5. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X , y $A, B \subseteq X$. Diremos que $A \preceq B$ si $A \sim C$ para algún subconjunto $C \subseteq B$.

Teorema 3.3. (Teorema de Banach-Schröder-Bernstein) Supongamos que G actúa sobre X . Entonces \preceq induce una relación de orden sobre el conjunto de clases de equivalencia de \sim . Esto es, la relación \preceq es simétrica, transitiva, y verifica que si $A, B \subseteq X$ son tales que $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim B$.

Demostración. Es sencillo comprobar que \preceq es una relación reflexiva y transitiva. La reciprocidad es no trivial. En primer lugar, nótese que, para cualesquiera conjuntos X, Y , si $X \sim Y$, entonces:

- a) Existe una biyección $g: X \rightarrow Y$ tal que $Z \sim g(Z)$ para todo $Z \subseteq X$. (Basta definir g a trozos, lo que también permite conservar el número de piezas).
- b) Si $X_1 \cap X_2 = \emptyset = Y_1 \cap Y_2$, y $X_1 \sim Y_1, X_2 \sim Y_2$, entonces $X_1 \cup X_2 \sim Y_1 \cup Y_2$.

Ahora, por hipótesis existen $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ tales que $A \sim B_1, B \sim A_1$. Sean $f: A \rightarrow B_1, g: A_1 \rightarrow B$ las biyecciones que establece la propiedad a). Definimos

$$\begin{cases} C_0 = A \setminus A_1, \\ C_{n+1} = g^{-1}f(C_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Nótese que $A \setminus C_0 = A \setminus (A \setminus A_1) = A_1$, y también $C_{n+1} \subseteq g^{-1}f(A) = g^{-1}(B) = A_1$, luego $g(C_i)$ tiene sentido para todo $i \in \mathbb{N}$.

3.3 Equidescomponibilidad y la Paradoja de Banach-Tarski

Sea ahora $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Como g es inyectiva, se tiene

$$\begin{aligned} g(A \setminus C) &= g(A \setminus C_0) \cap g\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = g(A_1) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} gg^{-1}f(C_n)\right) = \\ &= B \setminus f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = B \setminus f(C). \end{aligned}$$

De nuevo por $a)$, es $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$, y $C \sim f(C)$. Utilizando $b)$,

$$A = (A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B.$$

Así, $A \sim B$, como queríamos demostrar. \square

Cabe destacar que la misma demostración es válida para cualquier relación de equivalencia que verifique las propiedades $a)$ y $b)$.

También, como las biyecciones de $a)$ conservan el número de piezas, y la descomposición en $b)$ suma el número de piezas de ambas descomposiciones, se deduce del último paso de la demostración que, si $A \preceq_n B$, $B \preceq_m A$, entonces $A \sim_{(n+m)} B$.

Este teorema tiene importantes aplicaciones. Principalmente, la forma fuerte de la paradoja. Antes de esto, presentamos una proposición que será útil al reducir el número de piezas, y un ejemplo de una aplicación a un caso particular.

Proposición 3.4. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . $E \subseteq X$ es G -paradójico si y sólo si existen $A, B \subset E$ tales que $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$, $A \sim E \sim B$.*

Demostración. La dirección izquierda es clara. Supongamos que existe una descomposición paradójica, $A \sim_n E \sim_m B$. Entonces, $B \preceq_1 E \setminus A \subset E \preceq_m B$. Por el teorema anterior, $E \setminus A \sim_{m+1} E$. Por tanto, $A \sim_n E \sim_{m+1} E \setminus A$. \square

De esta forma, siempre que existe una descomposición paradójica de E usando conjuntos $A, B \subset E$, podemos suponer que A y B forman una partición de E .

Ejemplo 3.5. (AC) Consideremos la acción de \mathbb{R} sobre sí mismo por traslaciones. Entonces $[0, 1] \sim_{\infty} \mathbb{R}$

Consideremos el conjunto cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{x + \mathbb{Q} : x \in \mathbb{Q}\}$. Sea M un conjunto formado por un representante de cada clase en $[0, \frac{1}{2}]$. Entonces, $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in M} x + \mathbb{Q}$. Como $[0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q}$ y \mathbb{Q} son ambos numerables, se tiene que $[0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q} \sim_{\infty} \mathbb{Q}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in M} x + \mathbb{Q} \sim_{\infty} \bigcup_{x \in M} x + [0, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{Q} \subset [0, 1]$$

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Así, $[0, 1] \preceq \mathbb{R} \preceq [0, 1]$. Por el Teorema anterior, $[0, 1] \sim_{\infty} \mathbb{R}$.

El ejemplo es representativo porque permite una demostración alternativa de que M , el llamado **conjunto de Vitali**, es no medible (véase Proposición 6.1).

3.3.3 El Teorema de Banach-Tarski

Con todo lo que tenemos, podemos ya probar las dos versiones del Teorema de Banach-Tarski. En primer lugar, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4. *Si D es un subconjunto numerable de \mathbb{S}^2 , entonces $\mathbb{S}^2 \sim_{SO_3} \mathbb{S}^2 \setminus D$.*

Demostración. Observemos que el número de rectas que pasan por el origen es no numerable. Como D es numerable, existe una recta que no interseca D . Sea l dicha recta. Ahora, sea ρ_{θ} la rotación de ángulo θ sobre l . Sea $A \subseteq [0, 2\pi)$ el conjunto de ángulos θ tales que, para algún $P \in D$, y para algún $n > 0$, $\rho_{\theta}^n(P) \in D$. Como \mathbb{N} y D son ambos numerables, A es también numerable. Así, existe un ángulo $\theta \in [0, 2\pi] \setminus A$. Sea ahora $\rho = \rho_{\theta}$. Por la elección de θ , $D \cap \rho^n(D) = \emptyset$ para todo $n > 0$. De aquí, también deducimos que $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Por último, consideremos

$$D' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D).$$

Entonces,

$$\rho(D') = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(D) = D' \setminus D.$$

De este modo, $D' \sim D' \setminus D$, y por lo tanto:

$$\mathbb{S}^2 = D' \cup (\mathbb{S}^2 \setminus D') \sim (D' \setminus D) \cup (\mathbb{S}^2 \setminus D') = \mathbb{S}^2 \setminus D.$$

□

Corolario 3.2. *(AC) (Teorema de Banach-Tarski para la esfera.) \mathbb{S}^2 es $SO_3(\mathbb{R})$ -paradójico.*

Demostración. La paradoja de Hausdorff afirma que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es SO_3 -paradójico. Aplicando la Proposición 3.3 y el Teorema 3.4, concluimos que \mathbb{S}^2 es SO_3 -paradójico. □

Nótese que, aunque hemos realizado esta paradoja para la esfera unidad, un simple cambio de escala permite afirmar que la paradoja es cierta para esferas de cualquier radio.

Pasamos ahora a la descomposición de la bola. En este caso debemos tener en cuenta que todo giro en SO_3 deja fijo el origen, y que por lo tanto, éste quedará siempre en una

3.3 Equidescomponibilidad y la Paradoja de Banach-Tarski

de las piezas de la descomposición, y no podremos “duplicarlo”. Por ello, necesitamos ampliar nuestro grupo a G_3 , grupo de isometrías del espacio afín euclídeo. Esto es, añadimos traslaciones, rotaciones y reflexiones respecto a cualquier eje.

Teorema 3.5. (AC) (Teorema de Banach-Tarski.) *La bola unidad, $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ es G_3 -paradójica. Además, \mathbb{R}^3 es G_3 -paradójico.*

Demostración. Consideremos, para cada $0 < r \leq 1$, la misma descomposición de la esfera de radio r . Obtenemos entonces una descomposición paradójica de $\mathbb{B} \setminus \{0\}$. Probamos que $\mathbb{B} \sim \mathbb{B} \setminus \{0\}$.

3. EL TEOREMA DE BANACH-TARSKI

Sea $P = (0, 0, \frac{1}{2})$, y sea ρ una rotación de ángulo un múltiplo irracional de 2π sobre el eje horizontal en el plano xz que contiene a P . Entonces, ρ tiene orden infinito, pues si existiera $n > 0$ tal que $\rho^n(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$, se daría $2\pi\theta n = 2\pi k$ para algún $k > 0$, pero θ es irracional. En particular, tenemos que $\rho^n(0) \neq 0$ para todo $n > 0$, y por lo tanto $\rho^n(0) \neq \rho^m(0)$ si $n \neq m$. Sea ahora $D = \{\rho^n(0) : n \geq 0\}$, unión disjunta. Entonces,

$$\rho(D) = \rho\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(0)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n(0) = D \setminus \{0\}.$$

De esta forma, $D \sim D \setminus \{0\}$, y por lo tanto

$$\mathbb{B} = (\mathbb{B} \setminus D) \cup D \sim (\mathbb{B} \setminus D) \cup D \setminus \{0\} = \mathbb{B} \setminus \{0\}$$

Por la Proposición 3.3, \mathbb{B} es G_3 -paradójico.

La descomposición de \mathbb{R}^3 se hace exactamente de la misma forma. Realizando la descomposición para cada esfera de radio $r > 0$, obtenemos que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es paradójico. El mismo argumento anterior prueba que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \sim \mathbb{R}^3$. \square

Cabe mencionar también que este método funciona para toda bola de radio $R > 0$ centrada en el origen, tomando descomposiciones de esferas de radio $0 < r < R$, y eligiendo un punto $P = (0, 0, \frac{R}{2})$. Además, toda bola es congruente (mediante traslaciones) a una bola centrada en el origen, y por lo tanto G_3 -paradójica.

Por último, presentamos la forma fuerte del teorema, también conocida como paradoja del Sol y el guisante. Ésta se deduce directamente de la paradoja principal y del Teorema de Banach-Schröder-Bernstein.

Teorema 3.6. (AC) Si $A, B \subset \mathbb{R}^3$ son conjuntos acotados con interior no vacío, entonces $A \sim_{G_3} B$.

Demostración. Como A está acotado, existe una bola K tal que $A \subseteq K$. Como B tiene interior no vacío, existe una bola $L \subseteq B$. Podemos recubrir K con un número finito de bolas con el mismo radio que L . Como L es paradójico, L es equidescomponible con la unión de dichas bolas y, de esta forma, se tiene que $K \preceq L$. Se tiene entonces que

$$A \preceq K \preceq L \preceq B,$$

y por lo tanto $A \preceq B$. Por simetría, el mismo argumento prueba que $B \preceq A$, de modo que $A \sim B$. \square

Llegados a este punto, varias preguntas surgen de forma natural. ¿Es cierta la paradoja en otras dimensiones?, ¿podemos minimizar el número de piezas de la descomposición?, ¿es posible eliminar el Axioma de Elección? Los siguientes capítulos se centrarán en contestar estas preguntas.

Reducción del número de piezas

Banach y Tarski no dan una estimación del número de piezas que utilizan en su demostración original. Analizando el método que hemos seguido, podemos comprobar que nuestra descomposición utiliza 10 piezas. En efecto, recordamos que el Teorema 3.1 mantiene el número de piezas, y la descomposición del grupo libre en dos generadores utiliza 5 piezas, de modo que nuestra paradoja de Hausdorff también utiliza 5 piezas. Además, en la paradoja sobre la esfera total, $D \sim_1 D'$, de modo que $\mathbb{S}^2 \sim_2 \mathbb{S}^2 \setminus D$. Por último, la Proposición 3.3 utiliza un número de piezas igual al producto de las piezas usadas en que $E \sim E'$ y en la descomposición de E . De este modo, en nuestra descomposición hemos utilizado $2 \cdot 5 = 10$ piezas. Cabe preguntarse cuál es el número mínimo de piezas que necesitamos para nuestras descomposiciones, tanto de la esfera como de la bola. Históricamente, el primero en hacerse esta pregunta fue John Von Neumann, quien afirma en 1929, sin demostración, que $4 + 5 = 9$ piezas bastan [20, pg.77]. Más tarde, en 1945, Sierpinski halla descomposiciones en $5 + 3 = 8$ piezas [16]. Finalmente, en 1947, Robinson cierra el problema: encuentra una descomposición de la esfera en cuatro piezas, y demuestra que no existen descomposiciones en tres o menos piezas. Además, utiliza esto para encontrar una descomposición de la bola maciza en cinco piezas, y demuestra que no existen descomposiciones de ésta en cuatro o menos piezas. [13]. El estudio del número de piezas no es relevante en cuanto a Teoría de la Medida, pero las técnicas que utilizamos proporcionan una nueva forma de tratar con los puntos fijos en una descomposición paradójica, de forma más general que en el Teorema 3.1.

4. REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PIEZAS

Como comentario previo, cabe comentarse que se entiende que E es paradójico en n piezas si existen $A, B \subseteq E$ **particionando** E y tales que $A \sim_r E \sim_s B$ con $r + s = n$. Gracias a la Proposición 3.4, sabemos que si existe una descomposición paradójica de E , entonces existe al menos otra descomposición donde los conjuntos utilizados particionan E , luego esta definición tiene sentido para cualquier conjunto paradójico.

4.1 Descomposición minimal de la esfera

Comenzamos con un resultado sencillo, que proporciona una cota inferior sobre el número de piezas que podemos utilizar en cualquier descomposición paradójica.

Teorema 4.1. *Sea G un grupo, y sea X un conjunto sobre el que actúa G . Si X es G -paradójico, entonces la descomposición paradójica utiliza al menos 4 piezas.*

Demostración. Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$ y $A \sim_m X \sim_n B$ con $m + n < 4$. Debe ser entonces $m = 1$ ó $n = 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $m = 1$. Se tiene así que $X = g(A)$ para algún $g \in G$, de donde $A = g^{-1}(X) = X$, y por lo tanto $B = \emptyset$, lo cual contradice que $B \sim X$. \square

Esto es, si una descomposición utilizara tres piezas, una de ellas debería ser congruente al conjunto total, pero esto haría que la pieza fuera el propio conjunto.

Dicho esto, procedemos a buscar una descomposición de la esfera en 4 piezas. Para ello, primero encontraremos otra descomposición minimal del grupo libre en dos generadores. Tras esto, no podemos utilizar el Teorema 3.1 directamente, pues como la acción del grupo libre tiene puntos fijos, tendríamos que añadir más piezas. En su lugar, utilizamos un teorema similar a éste, que establece una condición menos restrictiva sobre los puntos fijos y que podremos aplicar directamente a toda la esfera.

Teorema 4.2. *Sea $F = \langle \sigma, \tau \rangle$ grupo libre. Existe una partición $F = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, de forma que $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$. De esta forma, F es paradójico en cuatro piezas. Además, fijado $\omega \in F$, se puede elegir la partición de forma que ω esté en la misma pieza que e , la identidad en F .*

Demostración. La idea es adaptar las piezas de la otra descomposición para que una de ellas contenga la identidad. Recordamos que para $\rho \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$, $W(\rho)$ es el conjunto de palabras que empiezan por ρ .

Fijemos $\omega \in F$. Supongamos que ω comienza por σ (los demás casos son simétricos). Definimos

$$A_1 = W(\sigma) \cup \{\sigma^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{e\},$$

$$A_2 = W(\sigma^{-1}) \setminus \{\sigma^{-n} : n \in \mathbb{N}\},$$

$$A_3 = W(\tau),$$

$$A_4 = W(\tau^{-1}).$$

Entonces, es sencillo ver que $e, \omega \in A_1$, $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4$, como buscábamos. \square

Definición 4.1. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Diremos que la acción es **localmente conmutativa** si, para todo $x \in X$, el estabilizador $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ es conmutativo. Esto es, si dos elementos de G fijan el mismo punto, entonces conmutan.

Claramente, una acción propia es localmente conmutativa, pues el estabilizador de cualquier punto es el grupo trivial. Esta nueva condición es lo suficientemente poco restrictiva como para que podamos usarla en nuestro caso particular. La acción de SO_3 sobre la esfera es localmente conmutativa: si dos rotaciones fijan el mismo punto es porque éste se encuentra en el eje de ambas rotaciones. Como todos los ejes también pasan por el origen, y dos puntos determinan una recta, ambas rotaciones deben tener el mismo eje. Por lo tanto, conmutan.

Teorema 4.3. (AC) Sea $F = \langle \sigma, \tau \rangle$ el grupo libre en dos generadores. Sea X un conjunto sobre el que actúa F de forma localmente conmutativa. Entonces, X es F -paradójico usando cuatro piezas.

Demostración. Notemos que, en una órbita cualquiera, o todos los puntos quedan fijos por algún movimiento o ninguno de ellos queda fijo. En efecto, si $x \in \mathcal{O}$ queda fijo por $g \in G$, entonces, si $y = h(x)$, se tiene que $h^{-1}gh(y) = y$. Teniendo esto en cuenta, encontraremos una descomposición del conjunto X distinguiendo entre estos dos tipos de órbitas.

Para las órbitas sin puntos fijos, podemos traspasar la descomposición de F de la misma forma que en el Teorema 3.1. Sea M un conjunto con un elemento de cada una de estas órbitas. Definimos $P_i = \{g(M_i) : g \in A_i\}$, $i = 1, \dots, 4$, donde A_i son las piezas del teorema anterior. Se comprueba directamente que $\sigma(P_2) = P_2 \cup P_3 \cup P_4$ y $\tau(P_4) = P_1 \cup P_2 \cup P_4$ (ver demostración del Teorema 3.1).

Sea \mathcal{O} una órbita de puntos fijos. Sea $\omega \in F$ una palabra de longitud mínima fijando un punto en \mathcal{O} , y sea x un punto que queda fijo por ω . Si ρ es la primera letra de ω , entonces ω no acaba en ρ^{-1} , ya que si lo hiciera, $\rho^{-1}\omega\rho$ es una palabra más corta que ω fijando x . Para trasladar la descomposición de F a esta órbita, demostraremos que podemos representar de forma única cada $y \in \mathcal{O}$ como $v(x)$, donde v no acaba en ω ni en ρ^{-1} .

4. REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PIEZAS

Si $y = v(x)$, donde v es una palabra de longitud mínima con esta propiedad, entonces v no puede acabar en ω ni ω^{-1} , ya que en caso contrario, $y = v\omega^{\mp 1}(x)$ sería una representación más corta. Si v acaba en ρ^{-1} , $v\omega$ no acaba en ω (pues parte de v se cancela con ω) ni en ρ^{-1} , y además $v\omega(x) = v(x) = y$, luego podemos elegir esta representación.

Para la unicidad de v utilizaremos la conmutatividad local. Observemos que sólo las potencias de ω fijan x . En efecto, si $z(x) = x$ para $z \in F$, por conmutatividad local es $z\omega = \omega z$. Como F es libre, z y ω deben ser potencias de alguna otra palabra t , ya que en caso contrario obtendríamos una relación no trivial en F (este detalle puede consultarse en [8, Cap. 1, Ej. 6]). Por la elección de ω , debe ser $t = \omega$.

Ahora, si $u(x) = y = v(x)$ y u, v son palabras de la forma deseada, entonces $u^{-1}v$ fija x , luego $u^{-1}v = \omega^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \neq 0$, podemos suponer que $k > 0$ (en caso contrario, trabajaríamos con $v^{-1}u$). Entonces, o u^{-1} comienza por ρ , lo que contradice que u acaba en ρ^{-1} , o u^{-1} se cancela completamente con v , y por lo tanto v acaba en ω , lo que es de nuevo contradictorio. Necesariamente, $k = 0$ y $u = v$.

Ahora que la descomposición es única, incluiremos $y = v(x)$ en P'_i si $v \in A_i$. Hacemos esto (con distintas particiones, si fuera necesario) sobre cada órbita de puntos fijos. Comprobamos que esta partición satisface $\sigma(P'_2) = P'_2 \cup P'_3 \cup P'_4$, y $\tau(P'_4) = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_4$.

Para $\phi \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$, $y = v(x)$, si $\phi v(x)$ es la representación correcta de $\phi(y)$, entonces por la forma de la partición de F , las relaciones también se cumplen en P'_i . Si $\phi v(x)$ no es la representación correcta, entonces ϕv acaba en ω o ρ^{-1} .

Si ϕv acaba en ω , como v no lo hace, debe ser $\phi v = \omega$, y $\phi v(x) = \omega(x) = e(x)$. Así, la representación correcta de $\phi v(x)$ es $e(x)$. Como $\phi v = \omega$ está en la misma pieza que e , la relación se sigue cumpliendo.

Si ϕv acaba en ρ^{-1} , como v no lo hace, debe ser $v = e$ y $\phi = \rho^{-1}$. La representación correcta es entonces $\phi\omega$. Como e y ω están en la misma pieza, de nuevo se soluciona el problema. Por último, tomando $A'_i = P_i \cup P'_i$ se obtiene una descomposición en cuatro piezas de X . \square

Corolario 4.1. (AC) *La esfera \mathbb{S}^2 es $SO_3(\mathbb{R})$ -paradójica usando cuatro piezas, y no menos.*

Demostración. Como la acción de $SO_3(\mathbb{R})$ sobre la esfera es localmente conmutativa, y $SO_3(\mathbb{R})$ contiene un subgrupo isomorfo al grupo libre en dos generadores, el teorema anterior concluye el resultado. El Teorema 4.1 garantiza que no existen descomposiciones en menos de cuatro piezas. \square

Observemos que aparte del uso en la esfera, este teorema funciona en general. Hemos establecido una condición más débil sobre los puntos fijos de una acción para que ésta sea paradójica, minimizando además el número piezas que se utilizan. Introducimos por último en esta sección un teorema que complementa al Teorema 4.3, y que, junto a éste, permite caracterizar las descomposiciones en cuatro piezas.

Teorema 4.4. *Si G es un grupo actuando sobre un conjunto X , y X es G -paradójico en cuatro piezas, entonces G contiene un subgrupo libre de rango dos, que actúa sobre X de forma localmente conmutativa.*

Demostración. Supongamos que $g_1(A_1) \cup g_2(A_2) = X = g_3(A_3) \cup g_4(A_4)$ es una descomposición paradójica de X en cuatro piezas. Sean $\sigma = g_1^{-1}g_2, \tau = g_3^{-1}g_4$. Entonces, como $g(X) = X$ para todo $g \in G$, se tiene que $A_1, \sigma(A_2), A_3, \tau(A_4)$ son dos particiones de X , y que, por lo tanto,

$$\sigma(A_2) = X \setminus A_1, \quad \sigma^{-1}(A_1) = X \setminus A_2, \quad \tau(A_4) = X \setminus A_3, \quad \tau^{-1}(A_3) = X \setminus A_4.$$

Fijamos notación. Dado $\rho \in \{\sigma^{\pm 1}, \tau^{\pm 1}\}$, tal que $\rho(A_i) = X \setminus A_j$ en las ecuaciones anteriores, llamaremos **dominio** de ρ a $\text{Dom}(\rho) := A_i$, y **rango** de ρ a $\text{Rg}(\rho) := X \setminus A_j$. Observemos que $\text{Rg}(\rho) = X \setminus \text{Dom}(\rho^{-1})$.

Comprobamos que σ, τ son independientes. Sea $\omega = \rho_n \dots \rho_1$ una palabra reducida no trivial en σ, τ . Vemos que $\omega \neq 1$.

Sea $x \in X$ tal que $x \in \text{Rg}(\rho_n)$, y $x \notin \text{Dom}(\rho_1)$. Esto elimina, como mucho, dos A_i , y por lo tanto podemos tomar x en alguno de los dos A_i restantes. Como $x \notin \text{Dom}(\rho_1)$, entonces $\rho_1(x) \notin \text{Rg}(\rho_1) = X \setminus \text{Dom}(\rho_1^{-1})$, y por lo tanto $x \in \text{Dom}(\rho_1^{-1})$. Ahora bien, como $\rho_2 \neq \rho_1^{-1}$, y cada dominio es un único A_i , disjuntos entre sí, se tiene que $x \notin \text{Dom}(\rho_2)$. Por el mismo argumento, $x \in \text{Dom}(\rho_2^{-1})$. Podemos repetir esto con cada ρ_i , para obtener finalmente que $\omega(x) \notin \text{Rg}(\rho_n)$. Ahora bien, tomamos $x \in \text{Rg}(\rho_n)$, luego $\omega(x) \neq x$, y por lo tanto $\omega \neq 1$, como queríamos probar.

Omitimos la conmutatividad local, ya que involucra demasiados casos. La idea de la demostración consiste en ver que si dos elementos tienen un punto fijo en común, entonces verifican una propiedad. Al suponer que la acción no es localmente conmutativa, se llega a contradicción con esta propiedad. \square

Corolario 4.2. (AC) *Un grupo G es paradójico en cuatro piezas si y sólo si contiene un grupo libre de rango 2.*

Demostración. La dirección derecha se obtiene del Teorema 4.4. La izquierda, teniendo en cuenta que un grupo actúa sobre sí mismo de forma propia, se obtiene del Teorema 4.3. \square

4.2 Descomposición minimal de la bola

Al buscar una descomposición minimal de la bola, vemos que no podemos aplicar directamente el Teorema 4.3 por varias razones. En primer lugar, G_3 actúa sobre \mathbb{R}^3 , pero no sobre \mathbb{B} , dado que una traslación no trivial no lleva la bola en sí misma. Además, la acción de G_3 sobre \mathbb{R}^3 no es localmente conmutativa, lo cual es la hipótesis principal de nuestro resultado. En efecto, consideremos dos rotaciones con ejes distintos, pero que pasan por

4. REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PIEZAS

el origen. Estas isometrías fijan el origen, pero no conmutan. De este modo, no podemos afirmar directamente que existan descomposiciones de la bola en cuatro piezas. De hecho, procedemos a demostrar que éstas no existen. Utilizamos un lema previo:

Lema 4.1. *Sea \mathbb{B} una bola maciza, con frontera $\partial\mathbb{B} = \mathbb{S}$. Sean $B, B' \subset \mathbb{B}$, con $B \cap B' = \emptyset$, y $\sigma, \sigma' \in G_3$ tales que $\sigma(B) \cup \sigma'(B') = \mathbb{B}$ y $\sigma'(0) \neq 0$. Entonces B contiene una hemiesfera cerrada de \mathbb{S} .*

Demostración. Consideremos el punto de intersección de \mathbb{S} con la recta que une 0 y $\sigma'(0)$. Sea H la hemiesfera cerrada centrada en este punto. Entonces, se puede comprobar que $H \cap \sigma'(\mathbb{B}) = \emptyset$ (ver Figura 4.1). Como $\sigma(B) \cup \sigma'(B') = \mathbb{B}$, debe ser $H \subseteq \sigma(B)$, y por lo tanto $\sigma^{-1}(H) \subseteq B$. Como σ^{-1} es una isometría, $\sigma^{-1}(H)$ es la hemiesfera buscada. \square

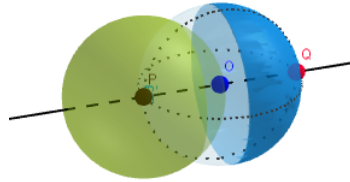


Figura 4.1: La esfera en línea de puntos es \mathbb{S} . $P = \sigma'(0)$ y la bola verde es $\sigma'(\mathbb{B})$. El punto Q es el que determina la posición de la hemiesfera, y H es la hemiesfera mencionada. Comprobamos en la imagen que se verifica $H \cap \sigma'(\mathbb{B}) = \emptyset$.

Teorema 4.5. *Dada una bola maciza, $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$, no existen descomposiciones paradójicas de \mathbb{B} en menos de 5 piezas.*

Demostración. Ya hemos visto que, en general, no existen descomposiciones en menos de cuatro piezas. Lo haremos para la bola unidad, pero el mismo argumento es válido para cualquier bola. Supongamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, & B_i \cap B_j &= \emptyset \text{ si } i \neq j, \\ \sigma_1(B_1) \cup \sigma_2(B_2) &= \sigma_3(B_3) \cup \sigma_4(B_4) = \mathbb{B}, & \sigma_i &\in G_3. \end{aligned}$$

es una descomposición en cuatro piezas de \mathbb{B} .

Observemos que no todos los σ_i fijan el origen. En efecto, supongamos que esto fuera así, y que, para fijar ideas, $0 \in B_1$. Tendríamos entonces que, $0 \notin \sigma_3(B_3) \cup \sigma_4(B_4) = \mathbb{B}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma_4(0) \neq 0$. Del lema anterior deducimos que B_3 contiene una hemiesfera cerrada H de \mathbb{S} . Como los B_i son disjuntos, se tiene que $(B_1 \cup B_2) \cap \mathbb{S} \subseteq \mathbb{B} \setminus H$ está contenido en una hemiesfera abierta de \mathbb{S} . De este modo, ni B_1 ni B_2 pueden contener una hemiesfera cerrada. Por el contrarrecíproco del Lema anterior,

tanto σ_2 como σ_1 deben fijar el origen, y por lo tanto deben ser rotaciones o reflexiones, de modo que llevan \mathbb{S} en sí misma. Ahora bien, se tiene entonces que

$$\mathbb{S} = (\sigma_1(B_1) \cup \sigma_2(B_2)) \cap \mathbb{S} = \sigma_1(B_1 \cap \mathbb{S}) \cup \sigma_2(B_2 \cap \mathbb{S})$$

está contenido en la unión de dos hemiesferas abiertas, y por lo tanto no puede rellenar todo \mathbb{S} , pero esto es contradictorio. \square

Robinson también demuestra que sí existen descomposiciones en cinco piezas. Para obtener dicha descomposición trabajaremos de forma similar a como lo hicimos con la bola en la paradoja original. Utilizaremos la descomposición minimal de las esferas de radio $0 < r < 1$, y formaremos una nueva pieza con el origen modificando la descomposición de la esfera de radio 1.

Teorema 4.6. (AC) *Existe una descomposición de \mathbb{B} , la bola unidad, en 5 piezas.*

Demostración. Para cada $r \in (0, 1)$, podemos considerar la acción de F , el subgrupo libre de SO_3 , sobre la esfera de radio r centrada en el origen, a la que denotaremos por S^r . El Teorema 4.3 proporciona una descomposición de cada esfera en cuatro piezas $S_1^r, S_2^r, S_3^r, S_4^r$. Llamando $C_i = \bigcup_{r \in (0,1)} S_i^r$, tenemos que $\sigma(C_2) = C_2 \cup C_3 \cup C_4$ y $\tau(C_4) = C_1 \cup C_2 \cup C_4$, y obtenemos una descomposición de la bola abierta menos el origen.

Consideremos ahora la acción de F sobre la esfera de radio 1, $S^1 = \mathbb{S}$. Tomemos una órbita \mathcal{O} sin puntos fijos (ésta existe, pues el conjunto de puntos que quedan fijos por algún elemento no trivial en F es a lo sumo numerable). La fórmula de sumación de órbitas garantiza que hay una cantidad no numerable de órbitas, y que por lo tanto debe haber alguna órbita sin puntos fijos. Sea $x \in \mathcal{O}$, y consideremos la descomposición de F en cinco piezas (Ejemplo 3.2). Recordemos que ésta verificaba $\sigma(A_2) = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \{e\}$, $\tau(A_4) = A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup \{e\}$. Utilizando la técnica del Teorema 4.2, podemos aplicar la descomposición de F en cinco piezas a \mathcal{O} , tal y como hicimos en el Teorema 3.1, para obtener conjuntos de la forma $S_{i,\mathcal{O}}^1 = \{g(x) : g \in A_i\}$, $i = 1, \dots, 4$, y una pieza formada por un sólo punto, $\{x\}$. Para las demás órbitas sobre S^1 , aplicamos la descomposición de F en cuatro piezas, que denotamos por S'_i , tal como lo hicimos en el Teorema 4.1. Si denotamos $S_i = S'_i \cup S_{i,\mathcal{O}}^1$, obtenemos una descomposición de S^1 en cinco piezas, $S_1, S_2, S_3, S_4, \{x\}$ que satisfacen $\sigma(S_2) = S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{x\}$ y $\tau(S_4) = S_1 \cup S_2 \cup S_4 \cup \{x\}$.

Por último, sea ρ la traslación que lleva x a 0. Tomando $B_1 = C_1 \cup S_1 \cup \{0\}$, y $B_i = C_i \cup S_i$, $i > 1$, se tiene que $B_1 \cup \sigma(B_2) = \mathbb{B}$ y $B_3 \cup \tau(B_4) \cup \rho(x) = \mathbb{B}$ es una descomposición de \mathbb{B} en cinco piezas. \square

Esta misma técnica nos serviría para demostrar que \mathbb{R}^3 es paradójico en 5 piezas. Dado el Teorema 4.4, podríamos pensar que, como la acción de G_3 sobre \mathbb{R}^3 no es localmente

4. REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE PIEZAS

conmutativa, ésta es la descomposición más sencilla que se puede hacer de \mathbb{R}^3 . No obstante, esta condición no contradice las hipótesis del Teorema 4.4. Éste plantea como condición necesaria (para que exista una descomposición en cuatro piezas) la existencia de un subgrupo libre actuando de forma localmente conmutativa, pero esto no fuerza a que la acción del grupo total deba ser localmente conmutativa. En efecto, se comprueba que, si θ es un ángulo tal que $\cos(\theta)$ es trascendente, entonces las isometrías

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

son independientes y actúan sobre \mathbb{R}^3 sin puntos fijos. De este modo, el Teorema 4.3 garantiza que \mathbb{R}^3 **admite una descomposición paradójica en 4 piezas.**

Paradojas en otras dimensiones

En este capítulo veremos cómo generalizar la paradoja en dimensión 3 a otras dimensiones. Comprobaremos que es sencillo generalizar el teorema a dimensiones superiores utilizando un argumento inductivo. En dimensiones 1 y 2, se puede comprobar que los correspondientes grupos de isometrías no contienen ningún subgrupo libre de rango 2, y que por lo tanto nuestras técnicas anteriores no son aplicables. En efecto, Banach demostró, utilizando el Teorema de Hahn-Banach, la existencia de una medida finitamente aditiva e invariante por isometrías sobre todos los subconjuntos de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 . Esto, como veremos en el siguiente capítulo, hace que una descomposición paradójica usando isometrías sea imposible en dimensiones 1 y 2. Pese a esto, Von Neumann se da cuenta de que, ampliando el grupo de transformaciones que nos permitimos realizar sobre el espacio, podemos obtener paradojas similares en estas dimensiones.

5.1 Dimensiones superiores

Como generalización del teorema original, buscamos obtener una descomposición paradójica en \mathbb{R}^n de \mathbb{S}^{n-1} , una de \mathbb{B}^n , y un resultado análogo a la forma fuerte del teorema. En principio, podríamos intentar aplicar las mismas ideas que en el teorema original: como dijimos en la Proposición 3.1, $SO_n(\mathbb{R})$ contiene un subgrupo libre de rango 2, que actuará sobre \mathbb{S}^{n-1} .

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

Los elementos de este subgrupo serán de la forma

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} & 0 \\ \sigma_{3 \times 3} & \vdots \\ & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}_{n \times n},$$

donde $\sigma \in SO_3$ es un elemento del subgrupo libre en SO_3 . No obstante, podemos observar que la acción de este subgrupo libre en \mathbb{R}^n , para $n > 3$, fija infinitos puntos sobre \mathbb{S}^{n-1} . En efecto, sabemos que $\sigma \in SO_3$ fija los dos polos de su eje. Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ es uno de estos polos, entonces $(x_1/r, x_2/r, x_3/r, (r^2 - 1)/r^2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^{n-1}$ queda fijo por $\sigma^* \in SO_n$ para cualquier $r \in (0, 1]$. Al ser este conjunto de puntos fijos no numerable, no podemos eliminarlo utilizando la técnica del Teorema 3.4. Por lo tanto, necesitamos utilizar otro método. Éste se basará en el método de inducción: seccionaremos la esfera \mathbb{S}^n en esferas de dimensión $n - 1$ sobre las que, por hipótesis de inducción, podremos aplicar la descomposición. Exponemos a continuación la versión generalizada a dimensión $n \geq 3$ del Teorema de Banach-Tarski.

Teorema 5.1. (AC) Sea $n \geq 3$. Entonces,

1. Toda esfera de dimensión $n - 1$ en \mathbb{R}^n es $SO_n(\mathbb{R})$ -paradójica.
2. Toda bola de dimensión n en \mathbb{R}^n es G_n -paradójica.
3. Cualesquiera dos subconjuntos de \mathbb{R}^n acotados y con interior no vacío son equidescomponibles.

Demostración.

2,3) Supuesto que 1) es cierto, las demostraciones de 2 y 3 son análogas al caso $n = 3$, y no se presentan nuevas dificultades. El lector puede comprobarlo siguiendo las demostraciones de los Teoremas 3.5 y 3.6.

1) Procedemos inductivamente. El resultado es cierto en dimensión 3 (Corolario 3.2). Supongamos que se cumple en dimensión $n - 1$, y veamos que se da en dimensión n . Basta hacerlo para la esfera de radio 1 centrada en el origen, $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Por hipótesis de inducción, existe una descomposición paradójica de \mathbb{S}^{n-2} utilizando conjuntos disjuntos dos a dos $A_i, B_j \subset \mathbb{S}^{n-2}$, y rotaciones $\sigma_i, \tau_j \in SO_{n-1}(\mathbb{R})$. Consideremos los conjuntos

$$A_i^* = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\} : (x_1, \dots, x_{n-1})/|(x_1, \dots, x_{n-1})| \in A_i\},$$

$$B_j^* = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\} : (x_1, \dots, x_{n-1})/|(x_1, \dots, x_{n-1})| \in B_j\}.$$

Por su definición, estos conjuntos son también disjuntos dos a dos. Comprobamos que

$$\bigcup_i \sigma_i^*(A_i^*) = \mathbb{S}^k \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\} = \bigcup_j \sigma_j^*(B_j^*).$$

En efecto, si $(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in \sigma_i^*(A_i^*)$, entonces $|(x_1, \dots, x_{n-1}, z)| = 1$, ya que $A_i^* \subset \mathbb{S}^k$ y σ_i^* es una isometría. Además, como σ_i^* fija la última coordenada, se tiene que $|z| \neq 1$. De este modo, $\sigma_i^*(A_i^*) \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\}$.

Por otro lado, si $(x_1, \dots, x_{n-1}, z) \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{0, \dots, \pm 1\}$, entonces

$$\frac{(x_1, \dots, x_{n-1})}{|(x_1, \dots, x_{n-1})|} \in \mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_i \sigma_i(A_i).$$

De aquí, por la forma de σ_i^* y la definición de A_i^* , se obtiene que $(x_1, \dots, x_k, z) \in \sigma_i^*(A_i^*)$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.

Podemos hacer lo mismo con los B_j^* . De esta forma, obtenemos una descomposición paradójica de \mathbb{S}^{n-1} menos los polos. Por último, podemos observar que el Teorema 3.4 es también cierto en dimensión n , siguiendo la misma demostración. De esta forma, se tiene que $\mathbb{S}^{n-1} \sim \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{(0, \dots, \pm 1)\}$, y por la Proposición 3.3, \mathbb{S}^{n-1} es $SO_n(\mathbb{R})$ paradójico. \square

5.2 Dimensiones inferiores

Como hemos mencionado en la introducción del capítulo, la paradoja no es posible en dimensiones inferiores. Los grupos de isometrías G_1, G_2 , de la recta real y el plano euclídeo, respectivamente, son resolubles: G_1 está formado por traslaciones, y por lo tanto es un grupo conmutativo. En G_2 , podemos considerar la serie abeliana $I \triangleleft SO_2 \triangleleft G_2$. Como la resolubilidad se conserva en subgrupos, y el grupo libre en dos generadores es no resoluble, estos grupos no pueden contener un grupo libre de rango 2. La existencia de una medida finitamente aditiva en estos espacios garantiza que la paradoja no es posible. Comentaremos con más detalles y relacionaremos ambas ideas en el capítulo siguiente, mediante el Teorema de Tarski. Ante este problema, ampliaremos ambos grupos de isometrías hasta que contengan un grupo libre de rango 2, que nos permita utilizar las técnicas que conocemos.

5.2.1 Comentario geométrico previo

Clásicamente, según los *Elementos* de Euclides, la geometría es el estudio de las propiedades que se mantienen fijas mediante isometrías. Por ejemplo, dos triángulos serán iguales si podemos llevar uno al otro mediante traslaciones y rotaciones. A finales del siglo XIX,

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

buscando dar solución a algunos problemas de geometría de la época, esta idea se generaliza. En 1872, F. Klein publica un programa de investigación, conocido como *Programa de Erlangen*, en el cual se define una geometría como el estudio de las propiedades de un espacio que se mantienen por la acción de un *grupo de invariantes*. Esto es, damos a priori qué aplicaciones admitiremos, y estudiamos qué propiedades quedan fijas por dichas aplicaciones. De esta manera, la geometría euclídea es la que estudia las propiedades que quedan fijas por movimientos rígidos, o incluso podemos considerar la topología como la geometría que utiliza como invariantes los homeomorfismos.

La esencia de la paradoja de Banach-Tarski es que al hacer actuar sólo isometrías sobre las piezas, éstas no cambian, en el sentido de que se mantiene la geometría euclídea de la pieza. Al aumentar ahora el grupo de invariantes, la geometría euclídea de las piezas cambiará, y no obtendremos una paradoja totalmente análoga. No obstante, podemos considerar geometrías del plano o la recta que contengan como invariantes las aplicaciones de los nuevos grupos ampliados. Siguiendo esta idea, las paradojas que procedemos a realizar, utilizando las ideas de von Neumann, no se realizan sobre el plano euclídeo o la recta real, tal y como acostumbramos a verlos. El conjunto subyacente es el mismo, pero al ampliar el grupo de invariantes, también consideramos una geometría distinta sobre el conjunto.

5.2.2 Paradojas sobre el plano, \mathbb{R}^2

La idea sobre \mathbb{R}^2 es ampliar el grupo de invariantes a aquellos que preservan el área sobre conjuntos medibles. Recordemos que una aplicación afín en \mathbb{R}^2 es de la forma $\sigma = \tau L$, donde τ es una traslación y L una aplicación lineal. Además, σ aumenta o disminuye el área del conjunto sobre el que actúa por un factor $|\det L|$. De este modo, procedemos a utilizar los grupos $SL_2(\mathbb{R})$, de matrices 2×2 con coeficientes en \mathbb{R} y determinante 1 (aplicaciones lineales que preservan el área y la orientación), y $SA_2(\mathbb{R})$, cuyos elementos son de la forma τL , donde τ es una traslación y $L \in SL_2(\mathbb{R})$ (aplicaciones afines que preservan el área y la orientación). También utilizaremos el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$, análogo a $SL_2(\mathbb{R})$ con coeficientes enteros. Lo primero que vemos es que esta ampliación es suficiente.

Proposición 5.1. Las matrices $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son independientes. $SL_2(\mathbb{Z})$ contiene un subgrupo libre de rango 2 que actúa de forma localmente conmutativa sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Demostración. La independencia puede consultarse en [19, Prop. 4.4]. Lo omitimos porque es tedioso y no presenta ninguna idea nueva. Para ver que la acción es localmente conmutativa, supongamos que $\omega_1, \omega_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ fijan el mismo punto P . Podemos elegir una base que contenga a P como vector. En esta base, tendremos $\omega_i = \begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$. Como $\det \omega_i = 1$, debe ser $b_i = 1$, y entonces,

$$\omega_1 \omega_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \omega_2 \omega_1.$$

□

Directamente de aquí, obtenemos lo siguiente.

Teorema 5.2. (AC)

1. El conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es $SL_2(\mathbb{Z})$ -paradójico (en cuatro piezas).
2. El plano \mathbb{R}^2 es $SA_2(\mathbb{R})$ -paradójico.

Demostración. 1. Aplicando el Teorema 4.3 y la Proposición 5.1.

2. Sabemos que $\mathbb{S}^1 \sim \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Sea τ una traslación tal que $\tau(1, 0) = (0, 0)$. Entonces,

$$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1) \cup \mathbb{S}^1 \sim (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1) \cup (\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}) \sim (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1) \cup (\mathbb{S}^1 \setminus \{(0)\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Aplicando la Proposición 3.3, \mathbb{R}^2 es $SA_2(\mathbb{R})$ -paradójico

□

5.2.2.1 La paradoja de Von Neumann en el plano

Una vez hecho esto, procedemos a buscar una descomposición paradójica de un conjunto medible, acotado y con interior no vacío (y de esta manera también con medida finita no nula). El problema en este caso es buscar un conjunto de este tipo sobre el que actúe $SA_2(\mathbb{R})$. El que aparezcan cizallas en este grupo hace que cualquier conjunto que quede fijo por la acción del grupo libre en $SA_2(\mathbb{R})$ sea siempre no acotado, o tenga interior vacío (por ejemplo, una recta). Para solucionar esto, trabajaremos sobre el cuadrado unidad semiabierto $J = [0, 1) \times [0, 1)$, identificando puntos bajo \mathbb{Z}^2 , esto es, $P \approx Q$ si $Q = P + R$ para algún $R \in \mathbb{Z}^2$.

Sea $H \subset A_2$ el grupo de transformaciones afines cuya aplicación lineal asociada está en $SL_2(\mathbb{Z})$. Para $P \in \mathbb{R}^2$, sea \hat{P} el único punto de J tal que $\hat{P} \approx P$. Para $\sigma \in H$, sea

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

$\widehat{\sigma}: J \rightarrow J$ dada por $\widehat{\sigma}(P) = \widehat{\sigma(P)}$. Veamos que $\widehat{\sigma}$ está bien definida, y que el grupo libre de rango 2 de $SL_2(\mathbb{Z})$ se traslada al grupo que contiene a $\widehat{\sigma}$.

Proposición 5.2. *La aplicación $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ es un homomorfismo bien definido de H en el grupo de biyecciones de J que son afines a trozos y preservan el área. Además, esta aplicación restringida a $SL_2(\mathbb{Z})$ es inyectiva, y por lo tanto un isomorfismo sobre su imagen.*

Demostración. Probamos en primer lugar que \approx tiene la siguiente propiedad: para $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $P \approx Q$ si y sólo si $\sigma(P) \approx \sigma(Q)$. En efecto, observemos que $\sigma(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$, y que por lo tanto, si $P = Q + R$, con $R \in \mathbb{Z}^2$, es $\sigma(R) \in \mathbb{Z}^2$, y

$$\sigma(P) = \sigma(Q + R) = \sigma(Q) + \sigma(R),$$

luego $\sigma(P) \approx \sigma(Q)$. De aquí también se deduce el recíproco, puesto que $\sigma^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Aplicando esta propiedad, es directo ver que $\widehat{\sigma}$ es inyectiva. Para la sobreyectividad, se compueba que $P = \widehat{\sigma}(\widehat{\sigma^{-1}(P)})$. De este modo, $\widehat{\sigma}$ es una biyección en J .

Para ver que $\widehat{\sigma}$ es afín a trozos y preserva el área, observemos que $\sigma(J)$ está acotado, y por lo tanto $\sigma(J)$ toma valores en un número finito de cuadrados unidad. Por cada uno de estos cuadrados, podemos definir el conjunto de puntos P tales que $\sigma(P)$ está en dicho cuadrado. Estos conjuntos particionan J . Además, $\widehat{\sigma}$ restringido a cada conjunto es de la forma $\tau\sigma$ para alguna traslación τ . De este modo, $\widehat{\sigma}$ es afín a trozos. Como además las imágenes de los trozos son disjuntas, $\widehat{\sigma}$ preserva el área.

Veamos ahora que $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ es un homomorfismo. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$, $P \in J$. Por la propiedad, se tiene que como $\widehat{\sigma}_2(P) \approx \sigma_2(P)$, es $\widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(P)) = \widehat{\sigma}_1(\sigma_2(P))$. Por lo tanto,

$$\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2(P) = \widehat{\sigma}_1(\sigma_2(P)) = \widehat{\sigma_1\sigma_2(P)} = \widehat{\sigma_1\sigma_2}(P).$$

Por último, veamos que la restricción de $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ a $SL_2(\mathbb{Z})$ es inyectiva. Para ello, supongamos que $L \in SL_2(\mathbb{Z})$ es tal que $\widehat{L} = e_J$ es la identidad en J . Sobre uno de los trozos de la partición J , podemos escribir $\widehat{L} = \tau L = e_J$. Cada uno de estos trozos es un polígono, luego esto ocurre en al menos tres puntos no colineales. Dado que τL es afín, debe ser $\tau L = e_J$. Pero entonces, necesariamente $L = e_J$. \square

Lo más importante de esta proposición es que, al ser $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ inyectiva, nos permite trasladar el subgrupo libre de rango 2 de $SL_2(\mathbb{Z})$ al grupo de biyecciones afines a trozos de J . Esto nos permite tener un grupo libre actuando sobre J para la descomposición paradójica. Procederemos de forma similar a la demostración de la paradoja de Banach-Tarski (Corolario 3.2). Haremos actuar el grupo libre y, tras esto, intentaremos suprimir el conjunto de puntos fijos.

Teorema 5.3. (AC) (Paradoja de Von Neumann en el plano.) *El cuadrado unidad, J , es $SA_2(\mathbb{R})$ paradójico. Además, cualesquiera dos subconjuntos acotados de \mathbb{R}^2 con interior no vacío son $SA_2(\mathbb{R})$ -equidescomponibles.*

Demostración. Sea $F = \langle \sigma, \tau \rangle$ el subgrupo libre de rango 2 en $SL_2(\mathbb{Z})$, y sea T el grupo de traslaciones. Sean \hat{F}, \hat{T} las imágenes de estos grupos por la aplicación de la proposición anterior. Esta misma proposición garantiza que \hat{F} es un grupo libre de rango 2. Sea $D \subseteq J$ el conjunto de puntos que quedan fijos por algún elemento en \hat{F} . Entonces, \hat{F} actúa sin puntos fijos sobre $J \setminus D$. Por el Teorema 3.1, $J \setminus D$ es \hat{F} -paradójico. Ahora bien, los elementos de \hat{F} son afines a trozos. De este modo, particionando de nuevo las piezas que se utilizan, podemos afirmar que $J \setminus D$ es $SA_2(\mathbb{R})$ -paradójico. Bastará comprobar que $J \sim J \setminus D$.

Utilizaremos lo siguiente: si C es un subconjunto numerable de J , y τ es una traslación tal que $C \cap \hat{\tau}^n(C) = \emptyset$ para todo $n \geq 1$ (la cuál existe, siguiendo un argumento de cardinalidad), entonces

$$J = \left(J \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n(C) \right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n(C) \right) \sim \left(J \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n(C) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}^n(C) \right) = J \setminus C.$$

Veremos que $J \setminus D \sim J \setminus C$ para un conjunto numerable C , y que por lo tanto, $J \setminus D \sim J$.

Cada punto de D queda fijo por algún elemento en \hat{F} . Como el conjunto de puntos fijos de una afinidad es un subespacio afín, y F es numerable, D está formado por una cantidad numerable de segmentos y puntos. Sean D_1 el conjunto de segmentos, y D_2 el conjunto de puntos. Ya tenemos que D_2 es un conjunto numerable. Sean $S_i, i \geq 0$ los segmentos en D_1 . Para segmentos distintos, S_i, S_j , se tiene lo siguiente.

Si $S_i \not\parallel S_j$, entonces S_i y $\tau^n(S_j)$ intersecan a lo sumo en un punto, para cualquier traslación τ , y $n \in \mathbb{Z}$. Al haber una cantidad numerable de segmentos y posibles potencias de τ , a lo sumo habrá una cantidad numerable de intersecciones.

Si $S_i \parallel S_j$, entonces $\hat{\tau}^n(S_i)$ podría solaparse con S_j , dando lugar a una intersección no numerable. Para solucionar esto, elegimos $P \in S_j$, y suprimimos todas las traslaciones tales que $\tau^m(P)$ queda en la recta que contiene a $Q + S_i$ para algún $Q \in \mathbb{Z}^2$. Para τ de la forma deseada, si existe $x \in \hat{\tau}^m(S_j) \cap S_i$, entonces estos segmentos deben solaparse, y por lo tanto $\tau^m(P)$ quedaría también en la recta sobre la que se solapan, contradiciendo la elección de τ . Así, $\hat{\tau}^m(S_j) \cap S_i = \emptyset$. Existe al menos un τ de la forma deseada: como \mathbb{Z}^2 y los conjuntos índice de i, j, m son numerables, estamos eliminando una cantidad numerable de rectas a las que no podemos ir (y atención, esto implica eliminar una cantidad no numerable de traslaciones). No obstante, mantenemos una cantidad no numerable de rectas a las que sí podemos ir, y por lo tanto existe algún τ de la forma requerida. Para dicho τ , podemos entonces afirmar que $\hat{\tau}^m(D) \cap D$ es numerable para cualquier $m \neq 0$.

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

Por último, definimos

$$C = \bigcup_{m \neq 0} D \cap \hat{\tau}^m(D).$$

C es unión numerable de conjuntos numerables, luego es numerable. Se puede ver que $\hat{\tau}^n(D \setminus C) \cap \hat{\tau}^m(D \setminus C) = \emptyset$ si $n \neq m$, de modo que $\bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n(D \setminus C)$ es unión disjunta. Si A es el complementario de este conjunto en $J \setminus C$, entonces se tiene

$$J \setminus C = A \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\tau}^n(D \setminus C) \right) \sim A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{\tau}^n(D \setminus C) \right) = (J \setminus C) \setminus (D \setminus C) = J \setminus D.$$

Por la Proposición 3.3, como $J \sim J \setminus C \sim J \setminus D$, se tiene que J es $SA_2(\mathbb{R})$ -paradójico.

Para ver que dos conjuntos acotados con interior no nulo son equidescomponibles, procedemos de la misma forma que con las bolas en \mathbb{R}^3 . La misma demostración anterior es válida para cuadrados de cualquier tamaño, utilizando relaciones similares a la de \mathbb{Z}^2 , o utilizando cambios de escala. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ acotados y con interior no vacío. Como A tiene interior no vacío, existe un cuadrado $J_A \subseteq A$. Como B es acotado, existe un cuadrado J_B tal que $B \subseteq J_B$. Entonces, J_B puede cubrirse con un número finito de copias de J_A . Como J_A es paradójico, J_A es equidescomponible con este conjunto finito de copias, y por lo tanto $J_B \preceq J_A$. De este modo, $B \preceq J_B \preceq J_A \preceq A$, luego $B \preceq A$. Podemos realizar el mismo argumento para probar que $A \preceq B$, y por el Teorema de Banach-Schröder-Bernstein, $A \sim B$. \square

5.2.3 Paradojas sobre la recta, \mathbb{R} .

La recta real presenta otro problema respecto al plano. Una afinidad en \mathbb{R} es una aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. La aplicación f aumenta o disminuye la medida de cualquier conjunto medible por un factor $|a|$. De este modo, si consideramos las aplicaciones afines que conservan la orientación y el área, nos restringimos a las aplicaciones con esta forma y tales que $a = 1$. Sin embargo, este tipo de aplicaciones no son más que las isometrías de este espacio, luego no amplían nuestro grupo inicial. Ante esto presentamos dos soluciones.

La primera de ellas consiste en ampliar el grupo todo lo posible manteniendo de alguna forma la esencia de la paradoja: que las aplicaciones que se utilizan conservan la medida. De esta forma, definimos $G(\mu)$ como el grupo de biyecciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que tanto f como f^{-1} preservan la medida de Lebesgue sobre conjuntos medibles.

Sea μ la medida de Lebesgue normalizada sobre \mathbb{S}^2 (esto es, si μ^* es la medida de Lebesgue usual sobre la esfera, tratamos con $\mu = \frac{\mu^*}{4\pi}$, de modo que se cumpla $\mu(\mathbb{S}^2) = 1$).

Un resultado en Teoría de la Medida afirma que existe una biyección $F: [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que F y F^{-1} envían conjuntos medibles en conjuntos medibles y preservan la medida. La demostración de este resultado sale de los límites de este trabajo, y requiere conocimiento en Teoría de la Medida. El lector interesado y con conocimientos en este área puede deducir el resultado de [15, p.327].

Este resultado permite trasladar la paradoja de la esfera a este tipo de intervalos. Veremos además que cualesquiera dos intervalos de la misma longitud son equidescomponibles, y por lo tanto, la paradoja se puede llevar a cualquier intervalo acotado en \mathbb{R} .

Lema 5.1. 1. Si $C \subset [0, 1)$ es un conjunto numerable, entonces $[0, 1) \sim [0, 1) \setminus C$.

2. Se cumple que $[0, 1] \sim [0, 1) \sim (0, 1] \sim (0, 1)$ mediante traslaciones.

Demostración. 1. Como dijimos en el Ejemplo 3.4, el grupo de traslaciones módulo 1 actúa sobre $[0, 1)$ de la misma forma en que SO_2 lo hace sobre la circunferencia. De esta manera, si C es un conjunto numerable en $[0, 1)$, podemos trasladarlo a un conjunto D numerable sobre la circunferencia. Siguiendo el argumento del Teorema 3.4, como D es numerable existe una rotación $\rho \in SO_2$ tal que $\rho^n(D) \cap \rho^m(D) = \emptyset$ para todo $n \neq m$. Si $D' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D)$, es $\rho(D') = D' \setminus D$, y

$$\mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^1 \setminus D') \cup D' \sim (\mathbb{S}^1 \setminus D') \cup (D' \setminus D) = \mathbb{S}^1 \setminus D.$$

De nuevo, podemos trasladar esto al intervalo $[0, 1)$ para afirmar que $[0, 1) \sim [0, 1) \setminus C$ mediante traslaciones módulo 1. Por último, si esta descomposición utiliza piezas A_i y traslaciones módulo 1 $\tilde{\tau}_i$, podemos particionar cada uno de los A_i de modo que la restricción de $\tilde{\tau}_i$ a cada nuevo conjunto sea una traslación común. De esta manera, se tiene que $[0, 1) \sim [0, 1) \setminus C$ mediante traslaciones.

2. Por 1), sabemos que $[0, 1) \sim (0, 1)$. Utilizando esto,

$$[0, 1] = [0, 1) \cup \{1\} \sim (0, 1) \cup \{1\} = [0, 1).$$

Dejando fija una pieza $(0, 1)$ y trasladando 0 a 1 tenemos también que $[0, 1) \sim (0, 1]$. \square

Teorema 5.4. (AC) Sea $G(\mu)$ el grupo de biyecciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f, f^{-1} preservan la medida de Lebesgue. Entonces, cualquier intervalo es $G(\mu)$ -paradójico. Además, cualesquiera dos subconjuntos de \mathbb{R} acotados y con interior no vacío son equidescomponibles mediante $G(\mu)$.

Demostración. Sea $F: [0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^2$ una biyección que preserva la medida. El Teorema de Banach-Tarski original (Corolario 3.2) afirma que \mathbb{S}^2 es SO_3 -paradójico. Supongamos

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

que esto ocurre con piezas disjuntas \tilde{A}_i, \tilde{B}_j , e isometrías $\tilde{\sigma}_i, \tilde{\tau}_j$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Entonces, puesto que F y las isometrías preservan la medida, podemos afirmar que $\sigma_i := F^{-1}\tilde{\sigma}_i F \in G(\mu)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Si consideramos piezas $A_i = F^{-1}(\tilde{A}_i)$, como F es biyección y los \tilde{A}_i son disjuntos, los A_i serán también disjuntos. Además,

$$\bigcup_i \sigma_i(A_i) = F^{-1} \left(\bigcup_i \tilde{\sigma}_i(\tilde{A}_i) \right) = F^{-1}(\mathbb{S}^2) = [0, 1).$$

El mismo argumento se puede hacer con los \tilde{B}_j , lo que nos permite obtener una descomposición paradójica de $[0, 1)$.

Este argumento se puede hacer con cualquier intervalo acotado semiabierto I , tomando diferentes medidas en \mathbb{S}^2 para que se verifique que $F_I: I \rightarrow \mathbb{S}^2$ preserva la medida (esto es, multiplicando la medida usual de Lebesgue en \mathbb{S}^2 por un factor $l(I)/4\pi$).

El Lema 5.1.(2), y el hecho de que las traslaciones están en $G(\mu)$, garantizan que cualquier intervalo es $G(\mu)$ -paradójico.

Por último, para ver que cualesquiera dos intervalos son $G(\mu)$ -equidescomponibles, basta aplicar el Teorema de Banach-Schröder-Bernstein de la misma forma que en el Teorema 3.6, teniendo en cuenta que aquí las bolas son intervalos abiertos.

□

5.2.3.1 La paradoja de Von Neumann sobre la recta.

La segunda forma de ampliar nuestro grupo de transformaciones se debe a Von Neumann. La idea es considerar, sobre la recta real extendida, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, las transformaciones de la forma $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. En lo que sigue llamaremos a estas aplicaciones **fraccionales lineales**. Estas aplicaciones son biyecciones en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Se puede comprobar que la composición de fraccionales lineales se corresponde con el producto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y con esto, que la inversa de este tipo de aplicaciones es de nuevo un fraccional lineal. De este modo, las aplicaciones consideradas forman un grupo. Podemos identificar entonces cualquier matriz en $SL_2(\mathbb{Z})$ con el fraccional lineal que utiliza los mismos coeficientes. Esto da lugar a un homomorfismo de grupos. Este homomorfismo no es inyectivo: se comprueba que, si ϕ es el homomorfismo mencionado, entonces $\phi(A_1) = \phi(A_2) \Rightarrow A_2 = \pm A_1$. Procedemos ahora a encontrar un conjunto más grande de matrices independientes en $SL_2(\mathbb{Z})$, y vemos que el grupo libre que generan puede trasladarse al grupo de fraccionales lineales.

Definición 5.1. Un conjunto de elementos A se dicen algebraicamente independientes sobre un cuerpo K si para cada subconjunto finito de elementos, $a_1, \dots, a_n \subseteq A$ y para cada polinomio $p \in K[x_1, \dots, x_n]$ se verifica que $p(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow p \equiv 0$.

En lo que sigue tomaremos como cuerpo base $K = \mathbb{Q}$. La importancia de esta definición se basa en lo siguiente.

Lema 5.2. Sean $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ elementos algebraicamente independientes. Consideremos las matrices $f_i = \frac{1}{a_i d_i - b_i c_i} \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Estas matrices son independientes y por lo tanto generan un grupo libre en $SL_2(\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos primero que tenemos una expresión $\omega = h_1^{m_1} \dots h_m^{m_m}$ para matrices cualesquiera $h_i \in SL_2(\mathbb{R})$. Entonces ω será de la forma $\omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, donde A, B, C, D serán polinomios con coeficientes enteros, evaluados en los coeficientes de los h_i .

Sea ahora $\omega = f_1^{m_1} \dots f_m^{m_m} = Id$ una palabra reducida no trivial igual a la identidad. Entonces, si $\omega = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ es la expresión polinomial de ω al evaluarlo en los coeficientes de los f_i , debe ser $A = C = 1, B = D = 0$. Ahora bien, como los coeficientes de los f_i son algebraicamente independientes, los polinomios que definen A, B, C, D deben ser idénticamente constantes, y por lo tanto las igualdades anteriores deben darse al introducir cualquier matriz h_i en el lugar de f_i . Esto es, para cualesquiera matrices $h_i \in SL_2(\mathbb{R})$, debe verificarse $h_1^{m_1} \dots h_m^{m_m} = Id$. En particular, sean σ_1, σ_2 las matrices de la Proposición 5.1, y tomemos $h_i = \sigma_1^i \sigma_2^i$. Obtendríamos entonces una palabra no trivial reducida en σ_1, σ_2 igual a la identidad. La Proposición 5.1 establece que estas matrices son independientes, y por lo tanto tenemos una contradicción. \square

Lema 5.3. El grupo de fraccionales lineales contiene un subgrupo libre.

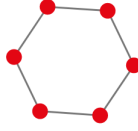
Demostración. Sea F el grupo libre generado por la matrices f_i del Lema 5.2 en $SL_2(\mathbb{Z})$. Consideremos el subgrupo $\phi(F)$ de fraccionales lineales. Sea $\phi(A_1) \dots \phi(A_n) = Id$ una palabra reducida en $\phi(F)$ igual a la identidad. Entonces, por lo mencionado, debe ser $A_1 \dots A_n = \pm I$. En cualquier caso, $o(A_1 \dots A_n) \leq 2$, y como F es libre, debe ser $A_1 \dots A_n = e_F = I$. De nuevo, por ser F libre, $A_1 = \dots = A_n = I$. De aquí, $\phi(A_i) = Id$ para $i = 1, \dots, n$. \square

El procedimiento que seguiremos se debe a M. Laczkovich, que define el concepto de equidescomposibilidad en términos de Teoría de Grafos, y nos permite utilizar las herramientas de este área. Necesitaremos varios resultados previos para demostrar el teorema principal. Comenzamos introduciendo algunos conceptos en la Teoría de Grafos.

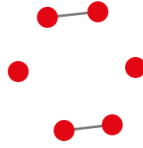
Definición 5.2. Sea $\Gamma = (V, E)$ un grafo. Se llama **emparejamiento** en Γ a cualquier conjunto de aristas no adyacentes entre sí. Diremos que un emparejamiento es **perfecto** si incluye todos los vértices del grafo.

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

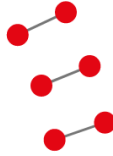
Ejemplo 5.1. Consideremos el grafo circular en 6 vértices, C_6 :



Un emparejamiento posible es el siguiente:



Dado que este emparejamiento deja dos vértices aislados, no es perfecto. Un ejemplo de emparejamiento perfecto sería el siguiente:



Es sencillo ver que cualquier conjunto finito de vértices admite un emparejamiento perfecto si y sólo si el número de vértices es par. Veamos cómo se relacionan el concepto de emparejamiento con la equidescomponibilidad entre dos conjuntos. Tras ello, demostramos una condición suficiente de existencia de emparejamientos perfectos.

Definición 5.3. Sea X un conjunto, y sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea H un conjunto de funciones $f: X \rightarrow X$. Definimos el grafo bipartito $\Gamma_H(A, B) = (V, E)$ cuyo conjunto de vértices es $V = A \cup B$, en partes A, B , y donde se incluye la arista $(x, y) \in E$ si existe $f \in H$ tal que $f(x) = y$.

Proposición 5.3. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Sean $A, B \subseteq X$. Entonces, $A \sim_G B$ si y sólo si existe un subconjunto finito $H \subseteq G$ tal que $\Gamma_H(A, B)$ admite un emparejamiento perfecto.

Demostración. Supongamos que $A \sim_G B$ mediante $A_i \subseteq A$ y $g_i \in G, i = 1, \dots, n$. Sea $H = \{g_1, \dots, g_n\}$. Consideremos el emparejamiento en $\Gamma_H(A, B)$ formado por las aristas (x, y) tales que $x \in A_i, y = g_i(x)$. Dado que A_i y $g(A_i)$ particionan respectivamente A y B , se trata efectivamente de un emparejamiento, y éste es perfecto.

La dirección opuesta es simétrica. Consideremos un emparejamiento perfecto, y supongamos que $H = \{g_1, \dots, g_n\}$. Entonces, para $i = 1, \dots, n$, sea $A_i \subseteq A$ el conjunto de $x \in A$ tales que, si (x, y) es una arista del emparejamiento, entonces $y = g_i(x)$. Como las aristas del emparejamiento son disjuntas, y todos los vértices se encuentran en el emparejamiento, los conjuntos $A_i, g_i(A_i)$ particionan A y B respectivamente, de modo que $A \sim B$. \square

Proposición 5.4. *Sea Γ un grafo bipartito con, como máximo, un ciclo, y tal que todo vértice tiene grado finito mayor o igual a 2. Entonces, Γ admite un emparejamiento perfecto.*

Demostración. Si Γ contiene un ciclo, como Γ es bipartito, el ciclo debe tener longitud par. Por lo tanto, los vértices del ciclo admiten un emparejamiento perfecto. Eliminemos las aristas adyacentes al ciclo. Al no haber más ciclos, obtenemos un bosque (familia de árboles). Basta ver que cada árbol admite un emparejamiento perfecto.

Tomemos una raíz del árbol. Como cada vértice tiene grado al menos dos, cada rama del árbol debe ser infinita (no puede haber hojas). Esto permite obtener un emparejamiento perfecto de cualquier rama mediante aristas alternadas. Sobre una rama maximal, realizamos el emparejamiento perfecto y eliminamos las aristas adyacentes a la rama. Obtendremos de nuevo un árbol infinito. Realizando el proceso sobre cada rama maximal, obtendremos un emparejamiento perfecto del árbol completo. \square

Introducimos los dos últimos lemas. El primero de ellos establece que cualquier aplicación lineal puede aproximarse arbitrariamente por un fraccional lineal. El segundo afirma que cualquier recubrimiento de un intervalo puede reducirse un poco sin dejar de cubrir el intervalo.

Lema 5.4. *Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \alpha x + \beta$. Sea $[-M, M]$ un intervalo. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una aplicación f dada por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ tal que a, b, c, d son algebraicamente independientes, $ad - bc = 1$ y, en el intervalo $[-M, M]$, $\|g - f\|_\infty < \epsilon$ y $\|f'\|_\infty \in B(|\alpha|, \epsilon)$.*

Lema 5.5. *Sea $\{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ un recubrimiento por abiertos de un intervalo compacto $J = [a, b]$. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $\{(a_i + \epsilon, b_i - \epsilon) : i = 1, \dots, n\}$ también recubre J .*

Omitimos las demostraciones de estos lemas. La demostración del Lema 5.4 utiliza un resultado según el cuál existe un conjunto denso de números algebraicamente independientes en \mathbb{R} , y define f mediante esto, utilizando una condición $\epsilon - \delta$ para que cumpla las condiciones requeridas. El Lema 5.5 se demuestra tomando $0 < \epsilon < \min_{i,j} \{a_i - a, b_j - b\}$.

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

Teorema 5.5. (AC) (Paradoja de Von Neumann para la recta.) Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos acotados. Para todo $\eta > 0$ existe una biyección de $f : I \rightarrow J$ que es además una contracción a trozos con coeficiente η . Esto es, existe una partición de I en conjuntos A_1, \dots, A_n tales que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, si $x, y \in A_i$, entonces $|f(x) - f(y)| < \eta|x - y|$.

Demostración. La demostración se desarrolla en cuatro partes:

1. Reducir el problema a condiciones más simples.
2. Demostrar que, para conjuntos C_1, C_2 numerables, $I_1 \setminus C_1 \sim J \setminus C_2$ mediante contracciones. En particular, existe una biyección $I_1 \setminus C_1 \rightarrow J \setminus C_2$, contracción a trozos.
3. Ver que existe una contracción a trozos $I_2 \rightarrow J \cap C_2$.
4. Utilizar el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein original (el que utiliza la relación de cardinalidad) para obtener la biyección que menciona el teorema.

Procedemos a la demostración.

1. Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos acotados. Suponemos inicialmente que $l(I) < l(J)$. Podemos suponer que tanto I como J son abiertos. En efecto, si el teorema es cierto para $\overset{\circ}{I}$, existe $f_1 : \overset{\circ}{I} \rightarrow J$ con las condiciones del teorema. Supongamos que f_1 es una contracción en piezas A'_1, \dots, A'_n . El Lema 5.1.(2) garantiza que $I \sim \overset{\circ}{I}$ mediante traslaciones. Supongamos esto utiliza piezas A''_1, \dots, A''_m y una biyección $f_2 : I \rightarrow \overset{\circ}{I}$. Entonces, $f : I \rightarrow J$, $f = f_1 f_2$ es una biyección, contracción a trozos $A_{ij} = A'_i \cap A''_j$ con el mismo coeficiente que f_1 . En efecto, si $x, y \in A_{ij}$, es

$$|f(x) - f(y)| = |f_1(f_2(x)) - f_1(f_2(y))| < \eta|f_2(x) - f_2(y)| = \eta|x - y|.$$

Un argumento similar puede hacerse con J , y de nuevo, multiplicando el número de piezas, se puede suponer que I y J son abiertos simultáneamente.

Asumiremos también que $\eta = 1/N$ para algún $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$. Esto no reduce la hipótesis, ya que $1/N \rightarrow 0$ y, dado $\delta > 0$, si $\eta < \delta$, entonces una contracción con coeficiente η es también una contracción con coeficiente δ .

Por último, consideremos subintervalos abiertos disjuntos $I_1, I_2 \subset I$.

2. Buscamos ahora fraccionales lineales f_1, \dots, f_n , con coeficientes algebraicamente independientes y que cumplan las condiciones siguientes
 - (a) $f_i|_{I_1}$ es una contracción para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
 - (b) Para todo $x \in I_1$, $f_i(x) \in J$ para al menos dos f_i distintos.
 - (c) Para todo $y \in J$, $f_i^{-1}(y) \in I_1$ para al menos dos f_i distintos.

En primer lugar, podemos cubrir J con intervalos de longitud $l(I_1)/N$. Consideremos dos recubrimientos distintos, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ de J con intervalos de este tipo. Para cada intervalo en cada recubrimiento, existe una función lineal g_i de la forma $g_i(x) = \frac{x}{N} + b_i$ llevando $\frac{I_1}{N} = \{\frac{x}{N} : x \in I_1\}$ al intervalo en cuestión. Definiremos los f_i del Lema 5.4 utilizando estos g_i , y ajustando ϵ para que se cumplan las tres condiciones.

- (a) Sea $\epsilon_1 = 1/(2N)$. Definiendo f_i a partir de g_i y ϵ_1 , se tiene que $\|f'_i\|_\infty < 1/N$ y por lo tanto f_i es una contracción con coeficiente $1/N$.
- (b) Sea ϵ_2 menor a toda distancia entre el final de un intervalo en cualquiera de los recubrimientos, y a_0 ó b_0 . Sea y el punto medio de J . Entonces y pertenece a algún intervalo de cada recubrimiento. Como estos intervalos tienen longitud $l(I)/N < l(J)/2$, y contienen a $y \in J$, ambos intervalos deben estar contenidos en J . Ahora, sea g_i la aplicación lineal asociada a alguno de estos intervalos, y consideremos el f_i asociado a g_i y ϵ_2 del Lema 5.4. Entonces, $|f_i(x) - g_i(x)| < \epsilon_2$, y por la definición de ϵ_2 , se tiene que $f_i(x) \in J$. Como hay un intervalo en cada recubrimiento, esto ocurre para al menos dos f_i .
- (c) Tomemos ϵ_3 en el Lema 5.5 de modo que sirva para ambos recubrimientos. Sean $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ los nuevos recubrimientos (obtenidos reduciendo cada intervalo un poco por cada extremo). Sea $x \in J$, y sea \tilde{I} un intervalo en algún \mathcal{D}_i conteniendo a x . Entonces, sean \tilde{I}' el intervalo original de \tilde{I} , y \tilde{g} la aplicación asociada a \tilde{I}' . Definamos \tilde{f} a partir de \tilde{g} y ϵ_3 en el Lema 5.4. Entonces, $f(I_1)$ es un intervalo cuyos extremos están a menos de ϵ_3 de los extremos de $\tilde{g}(I_1) = \tilde{I}'$. De aquí, deducimos que $\tilde{f}(I_1) \subseteq \tilde{I}$. Como x está en un intervalo en cada recubrimiento \mathcal{D}_i , existen dos f_i distintos tales que $f_i^{-1}(x) \in I_1$.

Para $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ podemos definir una familia $\{f_i\}$ verificando todas las condiciones anteriores.

Sea ahora $H = \{f_i\}$, y consideremos $\Gamma = \Gamma_H(I_1, J)$. Por (b), (c), todos los vértices tienen grado mayor o igual que dos. Sea F el grupo generado por H . Por el Lema 5.2, y el Lema 5.3, F es un grupo libre. Sea C la unión de componentes conexas de Γ que contienen al menos un punto fijo de un elemento no trivial de F . Como cada elemento de F es una contracción, el Teorema del Punto Fijo de Banach garantiza que cada aplicación en F tiene como máximo un punto fijo. Como H es finito y F numerable, C también es numerable.

Sea ahora $y \in \Gamma \setminus C$. La componente que contiene a y no tiene ciclos. En efecto, si los tuviera, tendríamos una palabra no trivial en H fijando un punto. Hemos eliminado las aplicaciones con esta propiedad, luego la palabra debe ser la identidad, y esto se contradice con que F es libre. Por la Proposición 5.4, la componente que contiene

5. PARADOJAS EN OTRAS DIMENSIONES

a y admite un emparejamiento perfecto. Podemos hacer esto para cualquier componente de $\Gamma \setminus C$. De este modo, Γ admite un emparejamiento perfecto. Aplicando la Proposición 5.3, $I_1 \setminus C \sim J \setminus C$ mediante contracciones de coeficiente $1/N$. Esto es, existe una biyección $f : I_1 \setminus C \rightarrow J \setminus C$, contracción a trozos de coeficientes $1/N$.

3. Cubramos ahora J con intervalos A_1, \dots, A_m de longitud menor a $\frac{l(I_2)}{N}$. Sea t_1 una traslación tal que $t_1(A_1) \subset \frac{I_2}{N}$. Sea $C_2 = (C \setminus A_1) \cap A_2$. Como $t_1(A_1 \cap C)$, C_2 son numerables, existe una cantidad numerable de traslaciones llevando algún punto de C_2 a algún punto de $t_1(A_1 \cap C)$. Por tanto, existe una traslación t_2 tal que $t_2(C_2) \cap t_1(A_1 \cap C) = \emptyset$ y $t_2(A_2) \subset \frac{I_2}{N}$. Podemos repetir este proceso para cada $1 \leq i \leq m$, y obtener traslaciones t_i tales que $t_i(C_i) \cap t_j(C_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Por último, $F : \frac{I_2}{N} \rightarrow I_2$ dada por $F(x) = Nx$ es una biyección. De este modo, podemos definir $g : J \cap C \rightarrow I_2$ dada a trozos por $g|_{C_i} = F \circ t_i$. Por construcción, g es inyectiva y g^{-1} es una contracción de coeficiente $1/N$ (las traslaciones mantienen la distancia, y F^{-1} es contracción).
4. Sea ahora $h : J \rightarrow I$ dada a trozos por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in J \cap C, \\ f^{-1}(x) & \text{si } x \in J \setminus C. \end{cases}$$

Entonces, por la forma de f y g , h es inyectiva, y h^{-1} es una contracción a trozos. Sea $\iota : I \rightarrow J$ una contracción con coeficiente $1/N$ inyectiva (no necesariamente sobreyectiva). El Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein establece que existe una biyección $I \rightarrow J$. Además, se puede comprobar en la demostración (ver Teorema 3.3) que esta biyección se construye a trozos mediante las aplicaciones ι y h^{-1} . De esta manera, esta biyección es una contracción a trozos con coeficiente $1/N$, como queríamos demostrar.

En el caso en que $l(I) \geq l(J)$, podemos considerar un intervalo $I_1 \subset I$, tal que $l(I_1) < l(J)$. Por el teorema, existe una biyección $f : I_1 \rightarrow J$, contracción a trozos de coeficiente η . Podemos tomar también un intervalo $J_1 \subseteq J$ suficientemente pequeño, de modo que exista una biyección $g : I \rightarrow J_1$, contracción de coeficiente η . Aplicando de nuevo el Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, existe una biyección $I \rightarrow J$, dada a trozos por f, g . Dicha biyección es una contracción a trozos de coeficiente η .

□

Existen conjuntos no medibles, pero esta afirmación no debería ser considerada como contradicción si uno llega a afirmar que jamás ningún hombre podrá nombrar un conjunto no medible.

H. Lebesgue

CAPITULO

6

Relación con la Teoría de la Medida

6.1 Introducción a la Teoría de la Medida

La Teoría de la Medida es el área de las matemáticas que estudia cómo generalizar las nociones de longitud, área o volumen a conjuntos arbitrarios. El ejemplo más representativo de medida es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n , introducida por H. Lebesgue en 1901, como parte del proceso de generalizar la integral de Riemann a un conjunto mayor de funciones. No obstante, G. Vitali encuentra en 1905, utilizando el Axioma de Elección, un subconjunto de \mathbb{R} al que no es posible asignar una medida invariante por isometrías. Esto hace que, en general, no sea posible asignar una medida a todos los subconjuntos de un conjunto dado, y debamos restringirnos a un álgebra o σ -álgebra de Boole adecuado.

Recordemos que, dado un conjunto X , un **álgebra** (resp. **σ -álgebra**) de Boole sobre X es una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $X \in \mathcal{A}$, si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$, y la unión finita (resp. numerable) de conjuntos en \mathcal{A} se mantiene en \mathcal{A} .

Definición 6.1. Sea X un conjunto, G un grupo actuando sobre X , y \mathcal{A} un álgebra de Boole en X . Una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ se denomina **medida finitamente aditiva invariante por G** si

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(A) = \mu(g(A))$ para cualquier $g \in G$, $A \in \mathcal{A}$.

6. RELACIÓN CON LA TEORÍA DE LA MEDIDA

3. Para cada familia finita $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos dos a dos se verifica

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Dado un σ -álgebra \mathcal{A}' en X , una **medida numerablemente aditiva invariante por G** es una función $\mu: \mathcal{A}' \rightarrow [0, \infty]$ que verifica las dos primeras condiciones, y tal que la tercera condición es cierta para familias numerables.

Si $\mu(X) < +\infty$, diremos que la medida es **finita**.

Observemos que una medida numerablemente aditiva es en particular finitamente aditiva.

Banach y Tarski se sirvieron de la existencia de conjuntos no medibles para realizar su paradoja. Veamos a continuación cómo este tipo de conjuntos está relacionado con las descomposiciones paradójicas.

Teorema 6.1. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X , y sea $E \subseteq X$ un conjunto finitamente (resp. numerablemente) G -paradójico. Entonces, no existe ninguna medida finitamente (resp. numerablemente) aditiva, $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, invariante por G , definida sobre todos los subconjuntos de X y tal que $0 < \mu(E) < \infty$.*

Demostración. Lo haremos para el caso finito. El caso numerable procede de la misma forma.

Supongamos que $A_i, B_j \subset E$ son conjuntos disjuntos, $\sigma_i, \tau_j \in G$ son tales que $E = \bigcup_i \sigma_i(A_i) = \bigcup_j \tau_j(B_j)$, donde $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$. Entonces,

$$\mu(E) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^n \sigma_i(A_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \mu(\sigma_i(A_i)) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \right).$$

De la misma forma, $\mu(E) = \sum_{j=1}^m \mu(B_j)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mu(E) &\geq \mu \left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m B_j \right) \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \\ &= \mu(E) + \mu(E) = 2\mu(E). \end{aligned}$$

Como $\mu(E) \geq 0$, debe ser $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) = +\infty$.

□

En particular, si $\mu(E)$ es finito, entonces alguno de los A_i o B_j debe ser no medible, y μ no puede estar definida en $\mathcal{P}(X)$.

Este teorema es aplicable junto con muchos resultados del Capítulo 3. El Ejemplo 3.3 garantiza que no existe una medida numerablemente aditiva no trivial sobre todos los subconjuntos de \mathbb{S}^1 . El mismo resultado es válido para circunferencias de distinto radio, de modo que, haciendo lo mismo para todas las circunferencias de radio $0 < r < 1$, podemos obtener un conjunto paradójico con medida no nula. Así, no existe una medida numerablemente aditiva en \mathbb{R}^2 .

El Ejemplo 3.4 supone otra demostración, independiente al resultado de Vitali, de que no existe una medida numerablemente aditiva normalizando el intervalo $[0, 1]$ sobre todos los subconjuntos de \mathbb{R} .

También, el Ejemplo 3.5 garantiza una demostración distinta de que el conjunto de Vitali es no medible. Para ello, observemos lo siguiente.

Proposición 6.1. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X . Sea μ una medida finitamente aditiva (resp. numerablemente aditiva) en $\mathcal{P}(X)$, invariante por G . Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \sim B$ (resp. $A \sim_\infty B$). Entonces, $\mu(A) = \mu(B)$.*

Demostración. Supongamos que $A \sim B$ mediante piezas A_i , y $g_i \in G$. Entonces,

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_i g_i(A_i)\right) = \sum_i \mu(g_i(A_i)) = \sum_i \mu(A_i) = \mu(A).$$

□

Si M fuera medible y $m([0, 1)) = 1$, por la Proposición anterior, se tendría que $m(\mathbb{R}) = m([0, 1))$. Ahora bien, $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k + 1)$. Como $[k, k + 1) = k + [0, 1)$, debería ser $m([k, k + 1)) = m([0, 1))$. Pero entonces,

$$1 = m([0, 1)) = m(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k + 1)\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu([0, 1)) = +\infty.$$

y llegaríamos a una contradicción: M no es medible.

En conclusión, no existen medidas numerablemente aditivas e invariantes por isometrías definidas en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. No obstante, no tenemos ejemplos de descomposiciones paradójicas en un número finito de piezas, luego no podemos garantizar que no existan medidas finitamente aditivas. De hecho, dichas medidas sí existen, tal y como veremos al final de este capítulo.

En cualquier otra dimensión, $n \geq 3$, el Teorema de Banach-Tarski sobre la Bola (Teoremas 3.5, 5.1) garantiza que no existe una medida, μ , **finitamente** aditiva, invariante por

6. RELACIÓN CON LA TEORÍA DE LA MEDIDA

isometrías y definida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 < \mu(\mathbb{B}^n) < +\infty$. Esto además garantiza que no existe una medida numerablemente aditiva.

Tarski demuestra en 1938 que el recíproco del Teorema 6.1 es también cierto. Esto supone una caracterización de las descomposiciones paradójicas en función de la existencia de medidas.

Teorema 6.2. (AC) (Tarski) Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X , y sea $E \subseteq X$. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. E es G -paradójico.
2. X no admite una medida, $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, finitamente aditiva, G -invariante y tal que $\mu(E) = 1$.

La implicación (2) \Rightarrow (1) se hace suponiendo que E no es paradójico y demostrando la existencia de la medida mencionada. Para ello, Tarski construye un semigrupo donde el que un conjunto A sea paradójico se traduce en que $A = 2A$ sobre el semigrupo. Tras ello, demuestra un resultado análogo en este semigrupo, encontrando una medida aquí y trasladándola al conjunto original. Para encontrar dicha medida, Tarski demuestra que el conjunto de funciones verificando las condiciones de la medida es no vacío, y que por lo tanto dicha medida existe. De este modo, la demostración es no constructiva, y no podemos definir de forma explícita la medida. Además, en su demostración Tarski hace uso del Teorema de Tychonoff. Éste afirma que el producto arbitrario de conjuntos compactos es compacto, y su demostración utiliza también el Axioma de Elección. Como consecuencia de esto, si no admitimos utilizar el Axioma de Elección, tampoco podemos demostrar utilizando este teorema que la paradoja de Banach-Tarski es falsa en dimensiones 1 y 2. Este tema se discute más profundamente en el Apéndice 1.

6.2 Grupos promediabiles

El Teorema de Tarski nos permite estudiar las descomposiciones paradójicas desde otro punto de vista. Podemos estudiar la existencia de medidas para demostrar la ausencia de descomposiciones paradójicas. Para comenzar, un resultado muy relacionado con esto es que, al igual que las descomposiciones paradójicas pueden trasladarse de un grupo al conjunto sobre el que actúa y viceversa (Teorema 3.1), una medida sobre un grupo también puede trasladarse al conjunto sobre el que actúa. John von Neumann [20] es el primero en darse cuenta de esto, y define el concepto de grupo promediable.

Definición 6.2. Un grupo G se dice **promediable** si admite una medida G -invariante, finitamente aditiva y definida en $\mathcal{P}(G)$ tal que $\mu(G) = 1$.

En lo que sigue, entenderemos por medida una medida finitamente aditiva, salvo que se diga explícitamente que la medida es numerablemente aditiva.

Teorema 6.3. Sea G un grupo promediable actuando sobre un conjunto X . Entonces, X admite una medida, $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$, G -invariante y tal que $\mu(X) = 1$. En particular, X no es G -paradójico.

Demostración. Sea ν la medida definida en G . Sea $x \in X$. Consideremos la función $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ dada por $\mu(A) = \nu(\{g \in G : g(x) \in A\})$. De las propiedades de ν se deduce que μ es la medida deseada. El Teorema 6.2 garantiza que X no es G -paradójico. \square

Si la acción es propia, una medida sobre X puede trasladarse también a G . Ahora bien, si el número de órbitas es no numerable, necesitaremos del Axioma de Elección.

Teorema 6.4. (AC) Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X de forma propia. Supongamos que X admite una medida, μ , en $\mathcal{P}(X)$, G -invariante y con $\mu(X) = 1$. Entonces, G es promediable.

Demostración. Sea M un conjunto conteniendo un único punto de cada órbita. Consideremos $\nu: \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$\nu(A) = \mu\left(\bigcup_{g \in A} g(M)\right).$$

Una simple comprobación demuestra que ν es la medida buscada. La aditividad se tiene porque la acción es propia, y las demás propiedades se obtienen a partir de las propiedades de μ . \square

En un grupo promediable podemos definir un funcional lineal con propiedades análogas a la integral. Para ello, nos basamos en la construcción de la integral de Lebesgue a partir de la medida de Lebesgue. Dado un grupo promediable G , con una medida μ , sea $B(G)$ el conjunto de funciones $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ acotadas. $B(G)$ es un espacio vectorial bajo la suma y producto de funciones. Como todos los subconjuntos de G son medibles, todas las funciones en $B(G)$ son medibles. Podemos definir la integral primero en funciones simples, tras esto para funciones no negativas utilizando el supremo, y por último para funciones genéricas utilizando la parte positiva y la parte negativa de la función. Esta construcción se

6. RELACIÓN CON LA TEORÍA DE LA MEDIDA

puede consultar con más detalle en [4, Cap. 2.3]. Además, por construcción, la medida será invariante por la acción de G . Esto es, para $g \in G$, $f \in B(G)$,

$$\int f(gx) d\mu = \int f(x) d\mu.$$

Este funcional se llama clásicamente **media invariante**.

Definición 6.3. Sea G un grupo. Un funcional lineal $F: B(G) \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **media invariante** si verifica

1. $F(f) \geq 0$ si $f \geq 0$.
2. $F(\chi_G) = 1$.
3. $F(f) = F({}_g f)$ para todo $g \in G$, donde ${}_g f(h) := f(g^{-1}h)$.

Recíprocamente, una media invariante $\int: B(G) \rightarrow \mathbb{R}$ define una medida en G , dada por $\mu(A) = \int \chi_A d\mu$. Esto da lugar a la siguiente caracterización.

Teorema 6.5. *Un grupo G es promediable si y sólo si admite una media invariante.*

En inglés, los grupos promediables se conocen como *amenable groups*. Esto forma parte de una broma: “mean” significa media en inglés, de modo que meanable significa “que admite una media”. El término “amenable” significa “dócil, tratable”, lo que hace alusión a las buenas propiedades de este tipo de grupos y suena de forma similar.

Encontrar medidas para demostrar que un grupo es promediable es difícil en general. Por ejemplo, se invita al lector a intentar encontrar una medida finita no trivial en \mathbb{Z} . Pese a esto, el caso finito es sencillo, y la promediabilidad se conserva por subgrupos y cocientes. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6.2. 1. *Los grupos finitos son promediables.*

2. (AC) *Un subgrupo de un grupo promediable es promediable.*
3. *Si N es un subgrupo normal de un grupo G promediable, entonces G/N es promediable.*
4. *Si N es un subgrupo normal de G , y $N, G/N$ son promediables, entonces G es promediable.*
5. (AC) *Los grupos abelianos son promediables.*

Demostración. 1. Un grupo finito G admite una medida dada por $\mu(A) = \frac{|A|}{|G|}$.

2. Un subgrupo actúa sobre el grupo total de forma propia. El Teorema 6.4 da el resultado.
3. G actúa sobre G/N . El Teorema 6.3 proporciona una medida en G/N , y el hecho de que ésta sea invariante por G permite deducir que también es invariante por G/N .
4. Sean ν_1, ν_2 medidas en $N, G/N$ respectivamente, con $\nu_1(N) = \nu_2(G/N) = 1$. Dado $A \subseteq G$, definimos $f_A: G \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_A(g) = \mu_1(N \cap g^{-1}A)$. Vemos en primer lugar que si $g_1N = g_2N$, entonces $f_A(g_1) = f_A(g_2)$, y por lo tanto f_A induce una aplicación en G/N . En efecto, si $g_1N = g_2N$, entonces $g_2^{-1}g_1 = h \in N$. Así,

$$\begin{aligned} f_A(g_2) &= \nu_1(N \cap g_2^{-1}A) = \nu_1(N \cap hg_1^{-1}A) = \\ &= \nu_1(h(N \cap g_1^{-1}A)) = \nu_1(N \cap g_1^{-1}A) = f_A(g_1). \end{aligned}$$

Por tanto, f_A induce $\hat{f}_A: G/N \rightarrow \mathbb{R}$. Como G/N es promediable, deducimos por el Teorema 6.5 que admite una media invariante. Definimos $\mu: \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu(A) = \int \hat{f}_A d\nu_2$.

Veamos primero que $\mu(G) = 1$. Como para todo $g \in G$, $f_G(g) = \mu_1(N \cap G) = \mu_1(N) = 1 = \chi_G(g)$, es

$$\mu(G) = \int \hat{\chi}_G d\nu_2 = \int \chi_{G/N} d\nu_2 = 1.$$

Para la aditividad, nótese que si $A, B \subseteq G$ son disjuntos entonces para todo $g \in G$, $g^{-1}A, g^{-1}B$ son también disjuntos. De aquí, $(N \cap g^{-1}A) \cap (N \cap g^{-1}B) = \emptyset$, por lo tanto $f_{A \cup B} = f_A + f_B$, y entonces $\hat{f}_{A \cup B} = \hat{f}_A + \hat{f}_B$. Como la media es lineal, se tiene la aditividad.

Por último, comprobamos que la medida es invariante por G . Dados $g, g_0 \in G, A \subseteq G$, observemos que $f_{gA}(g_0) = \mu_1(N \cap g_0^{-1}gA) = f_A(g^{-1}g_0)$. Como la media es invariante, se tiene

$$\mu(gA) = \int \hat{f}_{gA}(x) d\nu_2 = \int \hat{f}_A(gx) d\nu_2 = \int \hat{f}_A d\nu_2 = \mu(A).$$

5. La demostración es compleja y no constructiva. Puede consultarse en [19, p.222]. La omitimos, pero el resultado será relevante en lo que sigue.

□

6.2.1 La condición de Følner

Otra forma de estudiar la promediabilidad de grupos es generalizar la medida en un conjunto finito como cociente de cardinales. Ésta es la idea de E. Følner, matemático danés.

6. RELACIÓN CON LA TEORÍA DE LA MEDIDA

Definición 6.4. Dado un grupo G , y un sistema generador $S \subseteq G$, una familia de **conjuntos de Følner** para S es una familia de subconjuntos finitos no vacíos, $A_n, n > 0$, tales que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y además, para todo $g \in S$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|gA_n \triangle A_n|}{|A_n|} = 0.$$

donde $A \triangle B$ es la diferencia simétrica de A y B , esto es, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Esto es, los conjuntos de Følner varían poco por la acción de los elementos del grupo. El que haya tan poca variación permite definir una medida de forma no constructiva. Para ello, utilizaremos el Teorema de Tychonoff.

Teorema 6.6. (AC) (Tychonoff) *El producto arbitrario de conjuntos compactos es compacto.*

En particular, para un conjunto X cualquiera, el conjunto $[0, 1]^X = \{f: X \rightarrow [0, 1]\}$ es compacto. La compacidad de este conjunto nos permitirá utilizar el resultado a continuación. Recordemos que una familia \mathcal{F} de conjuntos tiene la **Propiedad de Intersección Finita** si, para toda subcolección finita $\{F_1, \dots, F_n\} \subseteq \mathcal{F}$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$.

Proposición 6.3. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces, para toda colección \mathcal{F} de subconjuntos cerrados de X se tiene que, si \mathcal{F} tiene la propiedad de intersección finita, entonces*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

Demostración. Sean X, \mathcal{F} como en el enunciado. Procedemos por contradicción. Supongamos que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$. Aplicando complementarios y utilizando las Leyes de Morgan, se tiene que $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c = X$. Como cada $F \in \mathcal{F}$ es cerrado, los F^c son abiertos, y por lo tanto obtenemos un recubrimiento por abiertos de X . Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{F_1^c, \dots, F_n^c\}$. Ahora, como $\bigcup_{i=1}^n F_i^c = X$, de nuevo tomando complementarios y aplicando las Leyes de Morgan, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$. Esto contradice que \mathcal{F} tiene la Propiedad de Intersección Finita, y por lo tanto debe ser $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. \square

Teorema 6.7. (AC) (Følner) *Un grupo finitamente generado es promediable si y sólo si admite una familia de conjuntos de Følner.*

Sólo probamos la implicación de izquierda a derecha, que nos resulta útil para encontrar grupos promediables.

Demostración. Sea S un sistema generador de G , y sea $\{A_i: i \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos de Følner para S . Para cada $n > 0$, sea \mathcal{M}_n el conjunto de medidas $\mu: \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1]$ finitamente aditivas tales que $\mu(G) = 1$ y, para todo $g \in S, X \in \mathcal{P}(G)$, es

$$|\mu(gX) - \mu(X)| \leq \frac{|gA_n \Delta A_n|}{|A_n|}.$$

En primer lugar, comprobamos que $\mathcal{M}_n \neq \emptyset$ para todo $n > 0$.

Sea $\mu_n: \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1]$ dada por $\mu_n(X) = \frac{|X \cap A_n|}{|A_n|}$. Es sencillo comprobar que μ_n verifica las condiciones de medida. Para la otra condición, observemos que, dados $g \in G, X \subseteq G$, se tiene que, como g define una biyección en G , es $|g(X \cap A_n)| = |X \cap A_n|$. Además,

$$\begin{aligned} g(X \cap A_n) &= (g(X \cap A_n) \cap A_n) \cup (g(X \cap A_n) \setminus A_n) \subseteq \\ &\subseteq (g(X) \cap A_n) \cup (g(A_n) \setminus A_n) \subseteq (g(X) \cap A_n) \cup (g(A_n) \Delta A_n). \end{aligned}$$

De aquí, se deduce que $|X \cap A_n| \leq |g(X) \cap A_n| + |g(A_n) \Delta A_n|$, y por lo tanto

$$|X \cap A_n| - |g(X) \cap A_n| \leq |g(A_n) \Delta A_n|.$$

Un argumento similar puede hacerse para ver que

$$|g(X) \cap A_n| - |X \cap A_n| \leq |g(A_n) \Delta A_n|.$$

De aquí, se tiene

$$|\mu_n(gX) - \mu_n(X)| = \left| \frac{|gX \cap A_n| - |X \cap A_n|}{|A_n|} \right| \leq \frac{|g(A_n) \Delta A_n|}{|A_n|}.$$

Y por lo tanto, $\mu_n \in \mathcal{M}_n$.

Ahora, recordemos que, por el Teorema de Tychonoff, $[0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$ es compacto. Se puede comprobar que las condiciones que establecen la definición de \mathcal{M}_n hacen que este conjunto sea cerrado en $[0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$. Además, como $\frac{|g(A_n) \Delta A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0$, podemos elegir una sucesión creciente $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $n_i \rightarrow \infty$, de forma que $\mathcal{M}_{n_{i+1}} \subset \mathcal{M}_{n_i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 6.3, tenemos que

$$\bigcap_{i>0} \mathcal{M}_{n_i} \neq \emptyset$$

Sea $\mu \in \bigcap_{i>0} \mathcal{M}_{n_i}$. Como $n_i \rightarrow \infty$, y $\frac{|g(A_n) \Delta A_n|}{|A_n|} \rightarrow 0$, debe ser $|\mu(gX) - \mu(X)| = 0$, y por lo tanto μ es invariante por elementos de S . Como S genera G , μ es G -invariante, y por tanto la medida buscada. \square

Veamos una aplicación de este teorema.

6. RELACIÓN CON LA TEORÍA DE LA MEDIDA

Ejemplo 6.1. Consideremos en \mathbb{Z} el sistema generador $S = \{1\}$ y los conjuntos $A_n = \{-n, \dots, n\}$. Observamos que $(A_n + 1) \triangle A_n = \{-n, n+1\}$. De este modo,

$$\frac{|(A_n + 1) \triangle A_n|}{|A_n|} = \frac{2}{2n+1} \rightarrow 0.$$

Así, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos de Følner, y por el Teorema 6.7, \mathbb{Z} es promediable. De aquí también deducimos que \mathbb{Z} no es \mathbb{Z} -paradójico.

6.3 Aplicaciones a la recta real y el plano euclídeo

Demostramos por último, utilizando las técnicas de promediabilidad, que la paradoja no es posible en dimensiones 1 y 2.

En primer lugar, procedemos sobre la recta real. Observamos que G_1 , el grupo de isometrías de la recta real, está formado únicamente por traslaciones, y por lo tanto es un grupo abeliano. La Proposición 6.2 (5) garantiza que G_1 es promediable. Por el Teorema 6.3, \mathbb{R} admite una medida finita, G_1 -invariante, en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, y por el Teorema 6.1, \mathbb{R} no es G_1 -paradójico.

En dimensión dos, tenemos que G_2 , grupo de isometrías del plano euclídeo, no es abeliano. Pese a esto, es resoluble y admite una serie normal abeliana, $I \triangleleft SO_2 \triangleleft G_2$. El grupo SO_2 está formado por rotaciones con centro en el origen, y por lo tanto es abeliano. El cociente G_2/SO_2 es isomorfo al grupo de traslaciones del plano euclídeo, también abeliano. Por la Proposición 6.2(5), SO_2 y G_2/SO_2 son ambos promediabiles, y por la Proposición 6.2(4), G_2 es también promediable. De este modo, \mathbb{R}^2 admite una medida finita, y por lo tanto no es G_2 -paradójico.

Como sabemos, G_n es paradójico para $n \geq 3$. En estas dimensiones, la existencia del subgrupo libre en dos generadores garantiza que estos grupos no son resolubles, y que por lo tanto no podemos aplicar la Proposición 6.2 para llegar a conclusiones similares. Von Neumann conjeturó que un grupo es promediable si y sólo si no contiene un grupo libre en dos generadores. No obstante, este resultado fue probado falso en 1980 por A. Yu. Ol'shanskii [11]. Éste encuentra un grupo no promediable en el que todos los subgrupos son cíclicos, y que por lo tanto no puede contener un grupo libre en dos generadores.

Aun admitiendo que en filosofía, en ciencia, en ética o en política dos y dos pudieran ser cinco, cuando se fabricaba un cañón o un aeroplano tenían que ser cuatro.

Emmanuel Goldstein

CAPITULO

7

Conclusiones

Para concluir el trabajo cabe comentar que, pese a lo ilógico que parece el resultado a primera vista, debemos siempre recordar que las piezas de la descomposición no son poliedros, o piezas que tengan un sentido físico, sino conjuntos de puntos aislados unos de otros, sobre los cuales se aplica la isometría a un mismo tiempo. Recordando la forma que tiene la descomposición en el grupo libre, y entendiendo que lo que hacemos sobre la esfera es algo similar a esta descomposición, la paradoja parece adquirir un poco más de sentido.

Muchos de los resultados obtenidos prueban que la existencia de una descomposición paradójica no se debe tanto al conjunto sobre el que se realiza, sino al grupo que actúa sobre dicho conjunto. La existencia de descomposiciones paradójicas en grupos se relaciona de forma directa con la promediabilidad, como anticipó Von Neumann y demostró Tarski. Hemos aplicado el hecho de que los grupos libres de rango dos no son promediabiles para abusar de esta relación, obtener la paradoja y generalizarla a cualquier otra dimensión.

Más allá del papel que la Paradoja de Banach-Tarski juega en contra del Axioma de Elección, la importancia de la paradoja se basa en el desarrollo de nuevas técnicas y conceptos, especialmente en Teoría de Grupos y Teoría de la Medida, que han resultado muy útiles en las matemáticas contemporáneas, y que no habrían sido estudiadas de otra forma. Además, la paradoja conecta una gran cantidad de áreas distintas de las matemáticas, y la sencillez que se esconde tras la demostración del teorema original da lugar a un resultado elegante y matemáticamente bello.

El Axioma de Elección es obviamente cierto, el Principio de Buena Ordenación es obviamente falso, y ¿quién sabe sobre el Lema de Zorn?

Jerry Bona

APPENDIX



El Axioma de Elección

El Axioma de Elección (AC) es uno de los protagonistas en toda la teoría correspondiente a la Paradoja de Banach-Tarski, y a las descomposiciones paradójicas en general. El axioma establece lo siguiente:

Sea $C = \{A_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de conjuntos no vacíos. Entonces existe un conjunto M conteniendo un único elemento de cada conjunto A_i en C .

En casos sencillos, podemos definir el conjunto M a partir de los otros axiomas de Zermelo-Fränkel utilizando una propiedad de cada conjunto en C . Por ejemplo, si $C = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$, podemos elegir en cada conjunto el menor elemento de C , y formar un conjunto con estos elementos. Si C es la colección de intervalos reales con longitud finita positiva, podemos definir el conjunto M tomando el punto medio de cada intervalo, etc.

El problema surge cuando no tenemos ninguna referencia para saber qué elemento debemos tomar de cada uno de los conjuntos. Entonces, los demás axiomas en ZF no nos permiten formar el nuevo conjunto, y requerimos del Axioma de Elección. Como ejemplifica B. Russell, “Para elegir un calcetín de una cantidad infinita de pares de calcetines, se requiere el Axioma de Elección, pero, en el caso de los zapatos, esto no es necesario”. En efecto, para los zapatos podemos elegir tomar el zapato derecho en todos los pares. Ahora bien, como ambos calcetines en un par son idénticos, debemos elegir arbitrariamente uno de cada par, y por lo tanto necesitamos AC. En el caso de que la familia C sea finita, tampoco necesitamos el Axioma de Elección: mediante los demás axiomas podemos tomar, en

A. EL AXIOMA DE ELECCIÓN

un número finito de pasos, un elemento de cada conjunto en C para formar nuestro nuevo conjunto.

El axioma es históricamente muy discutido porque, al elegir arbitrariamente los elementos que constituyen el nuevo conjunto, no podemos determinar si un elemento dado forma parte o no del conjunto. Se afirma que el conjunto M existe, pero se desconoce cuáles son sus elementos. Esto va en contra de la corriente intuicionista en las matemáticas, la cual defiende que la existencia de un objeto es equivalente a la posibilidad de construirlo. Además, puede conducir a paradojas, tales como el Teorema de Banach-Tarski, protagonista de nuestro trabajo. Pese a esto, el axioma es utilizado por gran parte de la comunidad matemática, y es necesario para muchos de los resultados que considerados dados sin darnos cuenta. Por ejemplo, veamos el siguiente problema, propio de los primeros cursos del grado:

Si $f: X \rightarrow Y$ es sobreyectiva, entonces existe $g: Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = Id_Y$.

Para resolver algo tan sencillo en general, ya precisamos del Axioma de Elección. A cada elemento $y \in Y$ llega al menos un elemento de X , de modo que el conjunto $f^{-1}(y)$ es no vacío. Sin embargo, ¿cómo podemos elegir qué elemento en $f^{-1}(y)$ debe ser $g(y)$? Para definir g , necesitamos elegir arbitrariamente un elemento de cada conjunto $f^{-1}(y)$, para todo $y \in Y$, y por lo tanto necesitamos AC.

También, es bien conocido que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Y esto también depende de AC. En efecto, si $\{A_i: i \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable donde cada A_i es numerable, podemos definir $f: \bigcup A_i \rightarrow \mathbb{N}$ utilizando un argumento diagonal, tal y como el que utiliza Cantor para demostrar que \mathbb{Q} es un conjunto numerable. Ahora bien, necesitamos elegir una biyección $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N}$ para cada A_i en la familia. Dado que hay un número infinito de A_i , y la biyección $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N}$ no es única, necesitamos formar un conjunto eligiendo arbitrariamente una biyección f_i para cada $i \in \mathbb{N}$. De nuevo, requerimos de AC para formar este conjunto. En efecto, es consistente con ZF la afirmación de que \mathbb{R} sea una unión numerable de conjuntos numerables, lo cual generaría un gran problema en torno a la teoría de la medida de Lebesgue, y dejaría sin aplicación tantos resultados que hoy son admitidos dentro de las matemáticas.

Otras importantes aplicaciones de AC son la afirmación de que todo espacio vectorial tiene una base, el Lema de Zorn, el Principio de Buena Ordenación y el Teorema de Hahn-Banach. El Lema de Zorn y el Principio de Buena Ordenación son equivalentes al Axioma de Elección. Sin embargo, el enunciado del Axioma de Elección es intuitivamente cierto,

y el del Principio de Buena Ordenación es intuitivamente falso. La cita del capítulo es una broma haciendo referencia a esta idea, y nos hace dudar de hasta qué punto podemos basarnos en nuestra intuición.

Gödel (1940) y Cohen (1963) demostraron que el Axioma de Elección es independiente a los demás axiomas en ZF, y por lo tanto indecidible dentro de este sistema. La paradoja de Banach-Tarski es también independiente a ZF: es consistente, pues se deduce del Axioma de Elección. Solovay prueba, en 1964, que el axioma “todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n son medibles según Lebesgue” es consistente con los axiomas de ZF, y esto conduce a la ausencia de la paradoja. De este modo, la negación de la paradoja es también consistente con ZF. Pese a esto, la paradoja es un resultado más débil que AC en el sentido de que, si admitimos la paradoja como axioma, no podríamos demostrar AC a partir de ésta.

Respecto a su teorema, Banach y Tarski defienden que, si se suprime AC para evitar este tipo de paradojas, también se suprime la posibilidad de demostrar que estas paradojas no existen en el plano euclídeo, pues esta demostración también utiliza AC. No obstante, A. P. Morse demuestra en 1949 que este resultado sí puede probarse dentro de ZF, y por lo tanto deja de ser un argumento a favor de AC.

A día de hoy, la gran mayoría de la comunidad matemática acepta el Axioma de Elección. Se reconoce la existencia de conjuntos no medibles, o la Paradoja de Banach-Tarski, puesto que no son obtenibles en el mundo físico, y por tanto no pueden generar problemas a este nivel. Además, su uso requiere de conjuntos infinitos, que no existen en el universo conocido, pues estamos limitados tanto en lo grande como en lo pequeño. Pese a esto, su carácter no constructivo prefiere ser evitado en la medida de lo posible, ya que muchas veces no da demasiada información sobre lo que se demuestra. Un ejemplo de esto es el uso del Teorema de Hahn-Banach: se garantiza la existencia de una extensión de un funcional, pero no se dice nada sobre dicha extensión. Todas las demás propiedades de ésta deben obtenerse por otros métodos. Por último, AC permite obtener resultados que son también ciertos sin éste de una forma más sencilla, ayudando a encontrar resultados que, aunque seguirían siendo ciertos, no serían fáciles de demostrar sin AC.

Bibliografía

- [1] S. Banach and A. Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6:244–277, 1924.
- [2] E. Bistrup and H. Lars. The Banach-Tarski Paradox. Bachelor thesis, University of Copenhagen, 2000.
- [3] J. Burillo. Grups i la Paradoxa de Banach-Tarski. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 23(2):181–199, 2008.
- [4] D. L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser Boston, 1980. 56
- [5] A. J. Durán. Cien años sin Cantor. *La Gaceta de la RSME*, 21(2):259–274, 2018.
- [6] C. Ivorra. La Paradoja de Banach-Tarski.
- [7] K. Juschenko. *Amenability of discrete groups by examples*. 2015.
- [8] A. Karrass, W. Magnus, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory*. Dover Publications, 1966. 30
- [9] M. A. Moreno and E. Pardo. *Teoría de grupos*. Textos Básicos Universitarios. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2003.
- [10] M. E. Naschie. Banach-Tarski Theorem and Cantorian micro space-time. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5(8):1503 – 1508, 1995. Integrals, Entropy and Chaos. 4
- [11] A. Olshanskiy. On the problem of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Mathematical Surveys*, 35:180–181, 1980. 60
- [12] J. Pla. L'Axioma de l'Elecció i la Paradoxa de Banach-Tarski. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 15, 1983.

BIBLIOGRAFÍA

- [13] R. Robinson. On the Decomposition of Spheres. *Fundamenta Mathematicae*, 34(1):246–260, 1947. 27
- [14] J. J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. World Publishing Corporation, 1991.
- [15] H. L. Royden. *Real analysis*. Macmillan, 2 edition, 1988. 43
- [16] W. Sierpinski. Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski. *Fundamenta Mathematicae*, 33(1):229–234, 1945. 27
- [17] F. E. Su. The Banach-Tarski Paradox. Technical report, Harvard University, 1990.
- [18] T. Tao. *An Epsilon of Room, I, Real Analysis: Pages from Year Three of a Mathematical Blog*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [19] G. Tomkowicz and S. Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, 2016. 4, 18, 39, 57
- [20] J. von Neumann. Zur Allgemeinen Theorie des Masses. *Fundamenta Mathematicae*, 13(1):73–116, 1929. 27, 54
- [21] L. M. Wapner. *The Pea and the Sun: A Mathematical Paradox*. Ak Peters Series. Taylor & Francis, 2007.